

NOM :

PRENOM :

Sujet choisi : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Autre sujet :

E est un K-ev, K corps commutatif. I Base d'un e-v en dimension finie	COR 10 On suppose E de dimension finie. • E admet une base. • de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base. • toute partie libre de E peut être complétée en une base.
1 Familles génératrices, familles libres [GOV] DEF 1 Une famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est dite f103 génératrice si $\text{Vect}((x_i)_{i \in I}) = E$, c'est-à-dire si tout élément est combinaison linéaire des $x_i, i \in I$.	Rq 11 Le théorème 9 reste vrai en dimension f103 infinie mais sa démonstration nécessite l'axiome du choix.
[GRI] DEF 2 E est dit de dimension finie s'il existe f11 une famille génératrice finie de E. Sinon il est dit de dimension infinie.	3 Théorie de la dimension À partir de là, E sera toujours de dimension finie.
[GOV] DEF/PROP 4 Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. Alors f103 • toute combinaison linéaire vérifiant $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ vérifie $\forall i \in I, \lambda_i = 0$ • aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.	DEF/TH 12 Toutes les bases de E ont le même f110 cardinal n, appelé dimension de E, noté $\dim_K E$. PROP 13 • Toute famille libre de cardinal n est une base. • ———— génératrice ————
Dans ce cas, la famille est dite libre. f103 TH 5 Si E est engendré par un nombre fini n de vecteurs alors toute famille libre a au plus n éléments.	PROP 14 Soit F un s.e.v. de E. Alors F est de dimension finie avec : • $\dim_K F \leq \dim_K E$ • $\dim_K F = \dim_K E \Leftrightarrow E = F$.
[GRI] EX 3 $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie f11	PROP 15 Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. de E. Alors $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$
2 Base d'un e-v [GOV] DEF 6 Une famille libre et génératrice de E f103 est appelée une base de E.	COR 16 Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. de E. • $E = E_1 \oplus E_2$ • $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$
f103 PROP 7 On suppose que E admet une base $(e_i)_{i \in I}$. Alors tout $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(e_i)_{i \in I}$.	• $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$ et $E = E_1 + E_2$. Rq 17 Si F est un s.e.v. de E, il y a en général une infinité de supplémentaires de F dans E.
f103 EX 8 Les $e_i = (0 \dots 0, \underset{i}{1}, 0 \dots 0), i \in [1; n]$ forment une base (dite canonique) de K^n.	II Application aux extensions de corps 1 Premières définitions et propriétés DEF 18 On appelle extension de K tout corps L tel qu'il existe un homomorphisme de corps $i: K \rightarrow L$. On note l'extension L/K.
f103 TH 9 On suppose E de dimension finie. Soient γ une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ ———— libre de E. Alors il existe une base B telle que $\mathcal{L} \subset B \subset \gamma$.	Rq 19 Si L/K est une extension alors L est un K-ev. DEF 20 Si $\dim_K L$ est finie, on pose $[L:K] = \dim_K L$ qu'on appelle le degré de L/K.

NOM :

PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

p65	TH21 [base télescopique] Soient $K \subset L \subset M$ des corps. Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une K -base de L et $(\beta_j)_{j \in J}$ une L -base de M . Alors $(\alpha_i \beta_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une K -base de M .	TH30 [Gauss] Les polynômes réguliers constructibles ont un nombre de côtes de la forme $2^\alpha p_1 \dots p_r$ où $\alpha \in \mathbb{N}$ et les p_i sont des premiers distincts de Fermat.	p51 DEV1
p65	COR22 Si les degrés de M/L et L/K sont finis alors $[M:K] = [M:L] \cdot [L:K]$.	III Rang 1 <u>Rang d'une application linéaire</u> Soit E' un K -espace vectoriel.	[GR1]
p66	DEF23 Soit L/K une extension. Soit $\alpha \in L$. On définit l'homomorphisme $\varphi: K[X] \rightarrow L$ par $\varphi _K = \text{Id}_K$ et $\varphi(X) = \alpha$. • Si φ est injective, on dit que α est transcendant sur K . • Sinon α est dit algébrique sur K . Cela signifie qu'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Plus précisément, $I = \text{Ker } \varphi$ est un idéal principal non nul : $I = (P)$ avec $P \neq 0$ supposé unitaire. P est appelé polynôme minimal de α sur K .	DEF/PROP31 Soit $f: E \rightarrow E'$ linéaire. $f(E)$ est un sous-espace vectoriel E' . On note $f(E) = \text{Im } f$ et on appelle sa dimension le rang de f : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$.	p59
p66	TH24 Soit L/K une extension et $\alpha \in L$. • α est algébrique sur K $\Leftrightarrow K[\alpha] = K(\alpha)$ $\Leftrightarrow \dim_K K[\alpha] < \infty$.	PROP32 Soit $f: E \rightarrow E'$ linéaire. Soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . • Si f est injective et $(v_i)_{i \in I}$ est libre alors la famille $(f(v_i))_{i \in I}$ de E' est libre. • Si f est surjective et $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice alors la famille $(f(v_i))_{i \in I}$ de E' est génératrice.	p61
p67	PROP25 Si α est algébrique sur K , le polynôme minimal P alors $[K(\alpha):K] = \deg P$.	TH33 Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.	p61
p66	EX26 π est transcendant sur $\mathbb{Q}$ $\sqrt{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}] = 2$.	Rq34 L'isomorphisme de E sur E' dépend du choix des bases dans E et dans E' et en général il n'y a pas d'isomorphisme canonique.	p62
p67	TH27 Soit L/K une extension. $M = \{\alpha \in L / \alpha \text{ est algébrique sur } K\}$ est un sous-corps de L .	TH35 [rang] Soit $f: E \rightarrow E'$ linéaire. On suppose E et E' de dimension finie. Alors $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f$.	p62
[CAR]	DEF29 Un nombre réel est dit constructible si c'est une des coordonnées dans le repère (O, I, J) d'un point constructible (à la règle non graduée et au compas).	COR36 Soit $f: E \rightarrow E'$ linéaire. On suppose E et E' de même dimension finie. • f injective $\Leftrightarrow$ • f bijective $\Leftrightarrow$ • f surjective.	p63
p28	TH29 [Wantzel] Tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$, de degré une puissance de 2.		

Sujet choisi :

Autre sujet :

2 Rang d'une matrice

f80 DEF37 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.
On appelle rang de la matrice A la dimension de l'espace engendré par les vecteurs colonnes de A .

f80 PROP38 Soit $f: E \rightarrow E'$ linéaire,
Soient $(e_1, \dots, e_m)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ bases de E et E' .
On note A la matrice de f dans ces bases.
Alors $\text{rg } A = \text{rg } f$.

f48 PROP39 Soit $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$. L'espace engendré par cette famille de vecteurs est invariant par :
• permutation
• multiplication d'un v_i par $\lambda \in K$
• somme à v_i d'une combinaison linéaire des autres v_j .

f50 APP40 La méthode du pivot de Gauss permet d'extraire une base d'une famille génératrice.
En particulier, elle permet de calculer le rang d'une matrice.

f123 TH41 $(v_1, \dots, v_m) \in E^m$ est une base de E ssi $\det(v_1, \dots, v_m) \neq 0$.

f123 DEF42 On appelle mineur d'ordre r d'une matrice A le déterminant d'une matrice d'ordre r extraite de A obtenue en choisissant r lignes et r colonnes.

f127 TH43 Le rang d'une matrice A est l'ordre maximal des mineurs non nuls extraits de A , soit
 $\text{rg } A = r \Leftrightarrow$ il existe un mineur d'ordre r non nul
tous les mineurs d'ordre $s > r$ sont nuls

[FGN] f174 COR44 Soit L/K une extension de corps.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. On note r_K (resp. r_L) le rang de A comme matrice à coefficients dans K (resp. dans L).
Alors $r_K = r_L$.

TH45 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) / MA = AM\}$ le commutant de A .

On note $K[A] = \{P(A), P \in K[X]\}$.

$$\mathcal{C}(A) = K[A] \Leftrightarrow \chi_A = p_A$$

où p_A est le polynôme minimal de A
et χ_A est le polynôme caractéristique de A .

160

DEV2

Ref:

[GOU] GOURDON, Algèbre

[GRI] GRIFONE, Algèbre linéaire

[GOZ] GOZARD, Théorie de Galois

[PER] PERRIN, Cours d'algèbre

[CAR] CARREGA, Théorie des corps

[FGN] FRANCINO, GIANELLA, NICOLAS,
Cours X-ENS algèbre 2