

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(E, \mathcal{E})$ un espace probabilisable.

I. Généralités sur les variables aléatoires discrètes

[Ouv08, Ch1, p14–20]

I. A. Caractérisation d'une variable aléatoire discrète

DÉFINITION 1. [VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE]

Une variable aléatoire X est une fonction mesurable $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$.

Si de plus $X(\Omega)$ est dénombrable presque sûrement, alors on dit que X est discrète.

On note $\mathbb{P}_X$ la mesure image de $\mathbb{P}$ par X et on l'appelle loi de X .

EXEMPLE 2. On lance une pièce, un dé, et on note X la variable aléatoire qui associe la face de la pièce ou la valeur du dé. Alors X est discrète.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E .

PROPOSITION 3. Enumérons $E' = (e_i)_{i \in I} \subset E$ où I est au plus dénombrable de sorte que $X(\Omega) \subset E'$ p.s.. Alors $\mathbb{P}_X$ est caractérisée par la famille $(p_i)_{i \in I}$ où $p_i = \mathbb{P}(X = e_i)$ et $\sum_{i \in I} p_i = 1$. De plus, on a $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in I} p_i \delta_{e_i}$.

I. B. Loix discrètes usuelles

Les variables aléatoires discrètes les plus classiques sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. On trouvera en annexe les propriétés de ces loix ($\mathbb{P}_X$, espérance, variance, ...). [VOIR ANNEXE]

APPLICATION 4. [MODÉLISATION PAR DES VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES]

- on lance une pièce équilibrée et on note $X = 1$ si le résultat est « face », 0 sinon. Alors $X \sim \mathcal{B}(1/2)$,
- si on lance n fois la pièce de manière indépendante, le nombre X de succès suit $\mathcal{B}(n, 1/2)$,
- le résultat du jet d'un dé à 6 faces équilibré se modélise par $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.
- soit ℓ le nombre moyen de personnes se présentant à un guichet chaque minute. Le nombre de personnes se présentant pendant N minutes peut se modéliser par $\mathcal{P}(N\ell)$.
- on lance une pièce équilibrée et on note X le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir « face ». Alors $X \sim \mathcal{G}(1/2)$.

I. C. Variables aléatoires discrètes et indépendance [Ouv08, Ch3/4, p51–86]

DÉFINITION 5. [INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES]

Soit I un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ des variables aléatoires telles que X_i est à valeurs dans $(E_i, \mathcal{E}_i)$. On dit que les $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes si pour tout $J \subset I$ fini, on a :

$$\forall (A_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} \mathcal{E}_i, \mathbb{P}(\cap_{i \in J} X_i \in A_i) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

PROPOSITION 6. [INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES]

Soit I un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$.

Soit $(E'_i)_{i \in I}$ des ensembles dénombrables tels que $\forall i \in I, X_i \in E'_i$ p.s..

Alors les $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $J \subset I$ fini, on a :

$$\forall (e_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} E'_i, \mathbb{P}(\cap_{i \in J} X_i = e_i) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(X_i = e_i)$$

EXEMPLE 7. Soient X, Y les résultats de deux lancers indépendants d'un dé à 6 faces équilibré. Soit $Z = \mathbb{1}_{X+Y \text{ est pair}}$. Alors (X, Y) , (X, Z) et (Y, Z) sont indépendantes mais pas (X, Y, Z) .

PROPOSITION 8. Soient X, Y des variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$ où $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y(z) = \sum_{x+y=z} \mathbb{P}_X(x) \mathbb{P}_Y(y)$.

EXEMPLE 9. Soient $p \in [0, 1]$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

- Si $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$,
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$,

APPLICATION 10. [MARCHE ALÉATOIRE SIMPLE SUR $\mathbb{Z}^d$]

Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{U}(\{\pm e_i, 1 \leq i \leq d\})$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = (\delta_{i,k})_{1 \leq k \leq n}$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors si $d \leq 2$, on a $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ i. s.}) = 1$ et si $d > 2$, on a $\mathbb{P}(|S_n| \rightarrow +\infty) = 1$.

I. D. Conditionnement

[Ouv08, Ch4, p87–115]

DÉFINITION 11. [PROBABILITÉ CONDITIONNELLE]

Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On définit $\mathbb{P}_{|B}$ l'application qui à $A \in \mathcal{A}$ associe $\mathbb{P}_{|B}(A) = \mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. C'est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée probabilité sachant B .

EXEMPLE 12. $\mathbb{P}_{|B}(A) = \mathbb{P}(A)$ si A et B sont indépendants.

PROPOSITION 13. [INTERSECTION D'ÉVÉNEMENTS]

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i \mid \cap_{j=1}^{i-1} A_j)$$

EXEMPLE 14. On tire successivement 4 cartes dans un jeu de 52 cartes (sans remise). Quelle est la probabilité de tirer les 4 as ?

PROPOSITION 15. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'événements disjoints deux à deux tels que $\mathbb{P}(\cap_{i \in I} A_i) = 1$ et pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$:

- **[FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES]** $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$,
- **[FORMULE DE BAYES]** Si $\mathbb{P}(A) > 0$, on a $\mathbb{P}(A_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(A \mid A_j) \mathbb{P}(A_j)}$ pour tout $i \in I$.

EXEMPLE 16. On place b_1 et n_1 (resp. b_2 et n_2) boules blanches et noires dans une urne U_1 (resp. U_2). On choisit une urne aléatoirement et on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ? que l'on ait choisi l'urne 1 sachant qu'elle est noire ?

REMARQUE 17. Ces formules sont très pratiques lorsque l'on prend pour $\mathbb{P}$ la loi d'une variable aléatoire discrète. Dans le cas où $\mathbb{P}$ n'est pas discrète, le fait d'avoir une famille satisfaisant les hypothèses de la proposition rend « moralement » cette probabilité discrète.

II. Moments et fonction génératrice

[Ouv08, Ch5, p115–178]

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}$.

II. A. Espérance et variance

DÉFINITION 18. [ESPÉRANCE]

Si $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| \mathbb{P}(X = x) < +\infty$, on dit que X admet une espérance et on définit l'espérance de X par $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbb{P}(X = x)$.

REMARQUE 19. $\mathbb{E}$ est linéaire. Lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ p.s., on a $\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$.

EXEMPLE 20. Espérance de $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n, p)$, $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{G}(p)$...

[VOIR ANNEXE]

PROPOSITION 21. [LEMME DE TRANSFERT]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne. Alors $f(X)$ admet une espérance si et seulement si $\sum_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \mathbb{P}(X = x) < +\infty$ et dans ce cas $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \mathbb{P}(X = x)$.

EXEMPLE 22. Si $X \sim \mathcal{G}(1/2)$ et si $f : n \mapsto \mathbb{1}_n$ est pair alors $\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{3}$.

DÉFINITION 23. [COVARIANCE, VARIANCE]

On définit :

- la covariance de X et Y par $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.
- la variance de X par $\text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$.

PROPOSITION 24. Cov est une forme bilinéaire symétrique positive et on a $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

EXEMPLE 25. Variance de $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{G}(p)$, ...

[VOIR ANNEXE]

PROPOSITION 26. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

EXEMPLE 27. La réciproque est fautive : prendre $X \sim \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = X^2$.

REMARQUE 28. Les inégalités classiques faisant intervenir espérance et variance sont valides dans le cas discret, notamment les inégalité de MARKOV, de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, de JENSEN, de CAUCHY-SCHWARZ, ... Ces résultats n'étant pas spécifiques aux variables aléatoires discrètes, nous ne nous étendons pas dessus.

APPLICATION 29. [THÉORÈME DE WEIERSTRASS]

$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}, \|\cdot\|_\infty)$ pour $a < b \in \mathbb{R}$.

II. B. Vers les fonctions génératrices

[CDGM16, p68–75]

On suppose X à valeurs dans $\mathbb{N}$ presque sûrement. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

DÉFINITION 30. [MOMENT ET MOMENT CENTRÉ D'ORDRE p]

Si $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$, on dit que X admet un moment d'ordre p (ou $X \in L^p$) et alors on appelle $\mathbb{E}[X^p]$ le moment d'ordre p et $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^p]$ le moment centré d'ordre p de X .

PROPOSITION 31. Si $X \in L^p$ alors $X \in L^q$ pour tout $1 \leq q \leq p$.

DÉFINITION 32. [FONCTION GÉNÉRATRICE]

On définit g_X la fonction génératrice de X par $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k) s^k$ (lorsque la série converge).

REMARQUE 33. Le rayon de convergence de cette série est au moins égal à 1 et $G_X(1) = 1$.

EXEMPLE 34. Fonctions génératrices de $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n, p)$, $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{G}(p)$... **[VOIR ANNEXE]**

PROPOSITION 35. G_X caractérise la loi de X . En particulier : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$.

PROPOSITION 36. X admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si g_X est p fois dérivable en 1, et dans ce cas $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1) \dots (X-p)]$.

PROPOSITION 37. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

APPLICATION 38. Expression de l'espérance, la variance, ou plus généralement d'un moment en fonction des dérivées en 0 de G_X .

APPLICATION 39. $\mathcal{P}(\lambda) + \perp\!\!\!\perp \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(2\lambda)$.

APPLICATION 40. On ne peut pas truquer deux dés de sorte que la somme des points obtenue en les lançant suive une loi uniforme.

PROPOSITION 41. [PROCESSUS DE BRANCHEMENT DE GALTON-WATSON]

Soient $(X_i^j)_{i,j \geq 1}$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note μ leur loi, m leur espérance et on définit le processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. et enfin $\rho = \mathbb{P}(\exists n \geq 0 \mid Z_n = 0)$. Alors si $\mu \neq \delta_1$, on a :

- si $m \leq 1$, $\rho = 1$ et on a extinction du processus presque sûrement,
- si $m > 1$, $\rho < 1$ et il y a une probabilité strictement positive de survie.

REMARQUE 42. Lorsque la variable aléatoire n'est pas à valeur dans $\mathbb{N}$ p.s., on utilise alors la caractérisation par la fonction caractéristique, valable pour des variables aléatoires quelconques. Par exemple pour calculer la loi d'une variable aléatoire multinomiale dont le paramètre n n'est pas déterministe mais suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

APPLICATION 43. [LOI MULTINOMIALE POISSONNIFIÉE]

Soient $(p_j)_{1 \leq j \leq d}$ des réels positifs tels que $\sum_{1 \leq j \leq d} p_j = 1$. Soient $(Y^k)_{k \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(Y^k = j) = p_j$. Soit N indépendante des $(Y^k)_{k \geq 1}$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$.

En posant $X^k = (\mathbb{1}_{Y^k=1}, \dots, \mathbb{1}_{Y^k=d})$, la loi de $S = \sum_{k=1}^N X^k$ est $\mathcal{P}(\lambda p_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(\lambda p_d)$.

III. Vers les Théorèmes limites

[BL07, §V.5, p131-147]

On considère des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}$.

III. A. Théorèmes limites

PROPOSITION 44. Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et X des variables aléatoires discrètes. Alors $X_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} X$ si et seulement si $\forall x \in F, \mathbb{P}(X_i = x) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = x)$, où $F = \cup_{i \in \mathbb{N}} E'_i \cup E'$ est dénombrable, avec $\forall i \in \mathbb{N}, X_i \in E'_i$ p.s. et $X \in E'$ p.s..

THÉORÈME 45. [THÉORÈME CENTRAL POISSONNIEN]

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{B}(i, p_i)$ avec $i p_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \lambda > 0$.

Alors $X_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} X$ où $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

THÉORÈME 46. [THÉORÈME CENTRAL LIMITE]

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de carré intégrable. Alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Z \sim \mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1))$$

APPLICATION 47. [INTERVALLE DE CONFIANCE ASYMPTOTIQUE]

[RS12, §3.4, p25]

Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des réalisations i.i.d. de $\mathcal{B}(p)$ pour un $p \in [0, 1]$ inconnu. Le théorème central limite donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour p en fonction de la moyenne empirique $\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$: $\text{IC}_\alpha(p) = \left[\hat{p}_n \pm \frac{q_{1-\alpha/2}}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, où q_t est le quantile d'ordre t de $\mathcal{N}(0, 1)$.

III. B. Chaînes de MARKOV

Définition d'une CM, exemple d'une marche aléatoire

Existence et unicité d'une mesure invariante à constant multiplicative près si la chaîne est irréductible récurrente

Si de plus la chaîne est apériodique et admet une probabilité asymptotique μ , alors on a convergence en loi de X_n vers μ

ANNEXE

[BL07, Appendice, p229]

Tableau des principales lois discrètes

Soit X une loi discrète et $p \in [0, 1], q \in]0, 1[, n \in \mathbb{N}, \lambda > 0$.

$\mathcal{L}(X)$	$\mathbb{P}_X$	$\mathbb{E}[X]$	$\text{Var}(X)$	$G_X(t)$
$\mathcal{U}([1, n])$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \delta_k$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{1}{n} \frac{t-t^{n+1}}{1-t} \quad (t \neq 1)$
$\mathcal{B}(p)$	$p\delta_1 + (1-p)\delta_0$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$
$\mathcal{B}(n, p)$	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \delta_k$	λ	λ	$e^{(\lambda-1)t}$
$\mathcal{G}(q)$	$\sum_{k=1}^{\infty} q(1-q)^{k-1} \delta_k$	$\frac{1}{q}$	$\frac{1-q}{q^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$

COMMENTAIRES

Voir également [Mé11].

QUESTIONS

Q Vous dites dans votre plan que l'on peut aussi utiliser la fonction caractéristique lorsque la variable aléatoire n'est plus à valeurs dans $\mathbb{N}$. Mais si elle l'est, peut-on aussi l'utiliser? Quels résultats a-t-on? Avez-vous un exemple de fonction caractéristique?

R Oui bien sûr, car la fonction génératrice n'est rien d'autre que la fonction caractéristique prise en certaines valeurs! Donc on va avoir des résultats de caractérisation, etc... Je donne l'exemple de la fonction caractéristique d'une loi de POISSON, et dis que dans les autres cas ça revient souvent à remplacer le t de la fonction génératrice par e^{it} .

Q Avez-vous des exemples de processus discrets?

R Les chaînes de MARKOV, les marches aléatoires qui sont aussi une chaîne de MARKOV d'ailleurs.

Q Pouvez-vous me donner la preuve de votre théorème pour montrer qu'il existe une unique mesure invariante?

R Alors évidemment, il faudrait introduire tout ce qui est récurrence, transience, temps d'arrêt, mais en gros on va expliciter la mesure en question. On utilise MARKOV fort, puis si $x \in E$ est fixé, on considère $\nu : y \mapsto \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbb{1}_{X_n=y}]$.

Q Quelle définition de convergence en loi utilisez-vous et comment on montre-t-on le résultat sur la convergence en loi de variables discrètes.

R J'énonce à l'oral la condition de convergence en loi, puis je ne me souviens que d'un des deux sens, pour lequel je fais un dessin de la fonction à utiliser...

Q Pour montrer le théorème central limite, est-ce vous utilisez cette caractérisation-là?

R Non il faut passer par la fonction caractéristique, on va pouvoir faire un développement limité à l'ordre 2 car la fonction caractéristique est $\mathcal{C}^2$, les variables aléatoires étant L^2 .

Q Soient $(X_i)_i$ des v.a.s indépendantes et identiquement distribuées de loi géométrique. Comment calculeriez-vous la loi de $\inf(X_i)_i$?

R On regarde la fonction de répartition.

Q Et que pouvez-vous me dire de la variable aléatoire qui modélise le temps d'attente avant un deuxième succès?

R J'hésite un peu mais propose le calcul suivant où T_i est le temps de i -ième succès :

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{n=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_2 = k \cap X_1 = n) = \dots = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$

On pouvait également passer par un système complet d'événements : $X_2 = k$ si une seule des $k-1$ premières variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $\mathcal{B}(p)$ est un succès, ...

Q On regarde la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et A_n l'événement $|S_n| \leq \sqrt{2Cn \ln(n)}$ où C est une constante. On veut montrer que $\liminf A_n$ i.s..

R Ça nous fait penser à utiliser BOREL-CANTELLI, qui donne $\liminf A_n^c$ i.s.. Je cite ensuite l'inégalité de Hoeffding, on me dit non plus simple, j'écris celle de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV mais ça ne suffit pas pour conclure, la majoration est trop grossière. Je repars sur Hoeffding.

Q Ok ça doit marcher comme ça mais est-ce que l'on peut utiliser plus simple?

R Je ne vois pas. On me dit d'utiliser les fonctions génératrices, mais l'oral s'arrête là.

BIBLIOGRAPHIE

[BL07] P. BARBE et M. LEDOUX : *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[CDGM16] M. COTTRELL, C. DUHAMEL, V. GENON-CATALOT et T. MEYRE : *Exercices de probabilités*. Cassini, 2016.

[Mé11] S. MÉLÉARD : *Aléatoire : introduction à la théorie et au calcul des probabilités*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2011.

[Ouv08] J.-Y. OUVARD : *Probabilités : Tome 1*. Cassini, 2^{ème} édition, 2008.

[RS12] V. RIVOIRARD et G. STOLTZ : *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2^{ème} édition, 2012.