# 262 CONVERGENCES D'UNE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES. THÉORÈMES LIMITE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé. On considère des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

## I. Modes de convergence

[BL07, ChV, p109] [Ouv09, Ch10, p89]

Soit $(X_n)_n$ et $X$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé.

### I. A. Convergence presque sure

Définition
Lemme de Borel-Cantelli, application à la convergence de $\frac{\max \mathcal{E}(1)}{\ln(n)}$ vers $1$ presque sûrement.

**Proposition 1. [Inégalité de Hoeffding]** *Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires réelles indépendantes, centrées et telles que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|X_i| \leq c_i$ p.s. pour un réel $c_i$. Alors pour tout $t \geq 0$ :*

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq t) \leq 2\,\mathrm{e}^{-t^2/2\sum_{i=1}^n c_i^2} \qquad \text{où } S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

**Corollaire 2.** *Supposons maintenant la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ infinie, avec les mêmes hypothèses.*
*S'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$, alors $\frac{S_n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ p.s..*

Stabilité de la convergence presque sure par somme, produit

### I. B. Convergence en probabilité

Définition, indépendance avec la norme choisie, compatibilité avec le couple, et par passage à une fonction continue
Exemple
Inégalités de concentration : Bienaymé-Tchebychev, Hoeffding, donnent des convergences en probabilité

### I. C. Convergence $L^p$

Définition, exemple

### I. D. Convergence en loi

Variables plus nécessairement définies sur le même espace probabilisé

**Définition 3. [Convergence en loi]** On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X$ si pour tout fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.

Définition, convergence ne dépendant que de la loi des variables aléatoires

**Exemple 4.** $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ converge en loi vers $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ si $\sigma_n \to \sigma$.

Théorème de Portmanteau
En dimension 1 :

**Proposition 5.** *$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$ si et seulement si $F_{X_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X$ en tout point de continuité de $F_X$.*

**Proposition 6.** *Si les variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = k)$.*

Incompatibilité avec l'addition

## II. Liens entre les modes de convergence

[BL07, ChV, p109] [Ouv09, §Ch10, p89]

### II. A. Implications

Convergence $L^p$ implique convergence $L^q$ pour $p > q$, contre-exemple sinon
Convergence p.s. implique en convergence probabilité : contre-exemple de $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$
Convergence $L^p$ implique convergence en probabilité
Convergence $L^p$ n'implique pas convergence p.s., mais on peut extraire une sous-suite convergeant p.s. Contre-exemple de $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$ (idem avec convergence en probabilité versconvergence p.s.)
Convergence p.s. implique convergence $L^p$ si domination. Contre-exemple de $X_n \sim n^2\mathcal{B}(1/n^2)$
Convergence en probabilités implique convergence en loi, la réciproque est vraie si la variable limite est constante p.s., fausse dans le cas général : si $X \sim \mathcal{B}(1/2)$, alors $1 - X \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$ en loi mais pas en probabilités.

### II. B. Notion d'uniforme continuité

Variables uniformément intégrables
Exemple avec des familles finies/iid/dominées $L^1$

Formulation équivalente
UI de variables aléatoires définies comme espérances conditionnelles d'une variable aléatoire $L^1$
Convergence en proba et UI équivaut à convergence $L^1$
Application à la convergence $L^1$ de martingales

# III. Théorèmes limites [BL07, ChV, p109]

## III. A. Loi des grands nombres et théorème central limite

**Théorème 7. [Loi des grands nombres]**
*Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. intégrables. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_1] \quad \text{p.s.}$$

L'hypothèse d'intégrabilité est cruciale :

**Proposition 8.** *Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{E}[|X_1|] = +\infty$. Alors la probabilité que la limite de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ existe dans $\mathbb{R}$ est nulle.*

**Application 9. [Méthode de Monte-Carlo]** [Mé11]
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et $(X_i)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoiresi.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Alors $I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)dx$ p.s..

**Théorème 10. [Théorème central limite]**
*Si les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont i.i.d. de carré intégrable, alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_1]) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} Z \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$$

**Application 11. [Intervalle de confiance asymptotique]** [RS12, §3.4, p25]
Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des réalisations i.i.d. de $\mathcal{B}(p)$ pour un $p \in [0,1]$ inconnu. Le théorème central limite donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau $\alpha$ pour $p$ en fonction de la moyenne empirique $\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_i$ : $\mathrm{IC}_\alpha(p) = \left[\hat{p}_n \pm \frac{q_{1-\alpha/2}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, où $q_t$ est le quantile d'ordre $t$ de $\mathcal{N}(0,1)$.

**Application 12.** Dans la méthode de Monte-Carlo, on obtient un intervalle de confiance de probabilité asymptotique $1-\alpha$ de longueur proportionnelle à $1/\sqrt{n}$.

**Théorème 13. [Théorème de Slutsky]**
*Reprenons les $(X_n)_n$ et $X$ dans $\mathbb{R}^d$ et soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires de $\mathbb{R}^\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}^*$) convergeant en probabilités vers une constante $c$. Alors $(X_n, Y_n) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} (X, c)$.*

**Application 14. [Intervalle de confiance asymptotique 2]**
Dans le même cadre on a l'intervalle de confiance asymptotique : $\widetilde{\mathrm{IC}}_\alpha(p) = \left[\hat{p}_n \pm q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}{\sqrt{n}}\right]$.

TCL multidimensionnel, application aux marches aléatoires → nombre de visites dans $\mathbb{B}(0,R)$.

## III. B. Convergence de chaines de Markov [BL07, ChVIII]

Chaînes de Markov, mesures invariantes
Irréductibilité, apériodicité
Propriétés de Markov
Conditions d'existence/unicité de mesures invariantes
Théorème ergodique, cas d'un espace d'état fini
Exemples ...

## ANNEXE

Liens entre les modes de convergence

## COMMENTAIRES

Intérêt de la méthode de MONTE-CARLO : ça converge toujours à vitesse $\sqrt{n}$ quelque soit la dimension (application du TCL multidimensionnel) : en dimension $1$ on a des méthodes plus rapides, mais pas en multidimentionnel.

## QUESTIONS

Q Soit $(X_n)_n$ telles que $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. Si $m_n \longrightarrow m$ et $\sigma_n \longrightarrow \sigma$, que dire de $(X_n)_n$ ?

R $X_n$ a même loi que $m_n + \sigma_n Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, Or $m_n + \sigma_n Z \longrightarrow m + \sigma Z$ presque sûrement, ce qui implique la convergence en loi.
Donc $X_n \longrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ en loi (si $\sigma = 0$, c'est $\delta_m$).

Q Soit $X_n \in [\![0, N]\!]$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X_n^k] \longrightarrow \mathbb{E}[X^k]$. A-t-on $X_n \longrightarrow X$ en loi ? $X$ reste-t-elle dans $[\![0, N]\!]$ ?

R On vérifie que $X$ est positive, et si $X > N$ avec probabilité positive, on vérifie aussi que ce n'est pas possible ... Par convergence dominée (trois fois !) :

$$\phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{k\geq 0} \frac{i^k X_n^k t^k}{k!}\Big] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\Big[\frac{i^k X_n^k t^k}{k!}\Big] = \sum_{k\geq 0} \frac{i^k \mathbb{E}[X_n^k] t^k}{k!}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\geq 0} \frac{i^k \mathbb{E}[X^k] t^k}{k!} = \phi_X(t)$$

Puis $\mathbb{P}(X \in ]0, N[) \leq \liminf_n \mathbb{P}(X_n \in ]0, N[) = 0$ donc $X \in [\![0, N]\!]$ p.s..

Q Soit une particule évoluant entre trois points : on passe de $1$ à $2$ ou de $1$ à $3$ avec proba $1/2$. Si elle est en $2$, elle reste avec proba $1/2$ et va en $1$ ou $3$ avec proba $1/4$. Si elle est en $3$ elle va avec proba $1/2$ en $1$ ou $2$. On part de $X_0 = 1$ et $X_n$ est la position au temps $n$. Quelle est la loi limite ? Que se passe-t-il si on change les probas de transition ? Le nombre d'états ? La condition initiale ? Quelles sont les conditions nécessaires ?

R On cherche un vecteur propre à gauche associé à $1$ pour $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que $Q^\top$ a $1$ pour valeur propre de multiplicité $1$ (par le théorème de PERRON-FROBENIUS). Donc $Q$ aussi.

## BIBLIOGRAPHIE

[BL07] P. BARBE et M. LEDOUX : *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[Mé11] S. MÉLÉARD : *Aléatoire : introduction à la théorie et au calcul des probabilités*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2011.

[Ouv09] J.-Y. OUVRARD : *Probabilités : Tome 2*. Cassini, 3ème édition, 2009.

[RS12] V. RIVOIRARD et G. STOLTZ : *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2 ème édition, 2012.