250 TRANSFORMATION DE FOURIER. APPLICATIONS.

I. Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ [BP15, Ch15, p315] [Rud98, Ch9, p219]

Définition 1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\mathcal{F}(f) : \zeta \longmapsto \hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\langle x|\zeta\rangle dx}$$

Définition 2. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{f}$ l'application $x \longmapsto f(-x)$.

Proposition 3. *$\mathcal{F}$ est linéaire et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est uniformément continue et bornée.*

Théorème 4. **[Lemme de Riemann-Lebesgue]**
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 5. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.*
(i) $\hat{\check{f}} = \overline{\hat{\overline{f}}} = \check{\hat{f}}$,
(ii) $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$,
(iii) Si τ_h est l'opérateur de translation par $h \in \mathbb{R}^d$ alors $\mathcal{F}(\tau_h f)(\zeta) = \mathrm{e}^{-i\langle h|\zeta\rangle}\, \mathcal{F}(f)(\zeta)$.
(iv) Pour $\lambda > 0$, $\mathcal{F}(f(./\lambda)) = \lambda \hat{f}(\lambda.)$

Exemple de convolution : $f = \mathbb{1}_{[-1,1]} \star \mathbb{1}_{[-1,1]}$ donne $\hat{f} = 4\,\mathrm{sinc}^2$

Application 6. La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne. On a $\hat{G}_\sigma$: $\zeta \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\zeta^2}{2}}$.

Convolution, approximation de l'unité

Proposition 7. *$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est injective et continue.*

Inversion de Fourier L^1

Exemple 8. On a $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-|x|}) : \zeta \longmapsto \frac{2}{1+\zeta^2}$. On en déduit que $\mathcal{F}(\frac{1}{1+x^2}) : \zeta \longmapsto \pi\,\mathrm{e}^{-|\zeta|}$.

Inversion ponctuelle

II. Régularité de la transformée de Fourier, prolongement à $L^2(\mathbb{R}^d)$ [BP15, Ch15, p315] [Rud98, Ch9, p219]

Définition 9. **[Classe de Schwartz]**
On définit la classe de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$, notée $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, N_p(f) = \sup_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\beta \partial^\alpha f(x)\right| < +\infty$$

On munit cet espace de la famille dénombrable de semi-normes $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il est donc métrisable (espace de Fréchet).

Exemple 10. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $G_\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 11. *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Proposition 12. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet et s'injecte continument dans les $L^p(\mathbb{R}^d)$, dans lesquels il est dense pour $p < +\infty$.*

Proposition 13. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation, multiplication interne, multiplication par un polynôme (ces opérations étant continues).*

Proposition 14. *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\zeta) = i^{|\alpha|}\zeta^\alpha \mathcal{F}(f)(\zeta) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(.^\beta f)(\zeta) = i^{|\beta|}\partial^\beta \mathcal{F}(f)(\zeta)$$

Corollaire 15. **[Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$]**
$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un automorphisme continu et on a $\mathcal{F}^{-1} : f \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(\check{f})$.

Proposition 16. *Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)dx$$

THÉORÈME 17. [THÉORÈME DE FOURIER-PLANCHEREL]
$\mathcal{F}$ se prolonge en un unique opérateur linéaire (toujours noté $\mathcal{F}$) de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même vérifiant :
- $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^d \check{\mathrm{Id}}$,
- *Pour* $f \in L^2(\mathbb{R})^d$, $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \left\|\hat{f}\right\|_{L^2}^2$,
- *Pour* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)dx$.

REMARQUE 18. La définition de $\mathcal{F}$ ci-dessus coïncide avec celle sur L^1, il n'y a donc pas d'ambiguïté.

EXEMPLE 19. On calcule $\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}} : \zeta \longmapsto 2\,\mathrm{sinc}(\zeta)$. Les deux fonctions étant $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que $\widehat{\mathrm{sinc}} = \pi \mathbb{1}_{[-1,1]}$.

III. Applications

III. A. Fonction caractéristique en probabilités

[Ouv09, §12.2, p197] [BL07, §III.5, p61]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

DÉFINITION 20. [FONCTION CARACTÉRISTIQUE]
On définit ϕ_X la fonction caractéristique de X par $\phi_X(\lambda) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\langle\lambda|X\rangle}\right]$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

EXEMPLE 21. Fonctions caractéristiques de $\mathcal{B}(n,p), \mathcal{E}(\lambda) \ldots$ **[VOIR ANNEXE]**

EXEMPLE 22. $\phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)} : \zeta \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\zeta^2}{2}}$.

PROPOSITION 23. *ϕ_X caractérise $\mathbb{P}_X$.*

APPLICATION 24. [LOI MULTINOMIALE POISSONNIFIÉE]
Soient $(p_j)_{1\le j\le d}$ des réels positifs tels que $\sum_{1\le j\le d} p_j = 1$. Soient $(Y^k)_{k\ge1}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(Y^k = j) = p_j$. Soit N indépendante des $(Y^k)_{k\ge1}$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$.
En posant $X^k = (\mathbb{1}_{Y^k=1}, \ldots, \mathbb{1}_{Y^k=d})$, la loi de $S = \sum_{k=1}^N X^k$ est $\mathcal{P}(\lambda p_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(\lambda p_d)$.

PROPOSITION 25. *Si X est réelle et admet un moment d'ordre p, alors ϕ_X est p fois dérivable et on a $\phi_X^{(p)}(\lambda) = i^p\mathbb{E}[X^p\,\mathrm{e}^{i\lambda X}]$. En particulier, $\phi^{(p)}(0) = i^p\mathbb{E}[X^p]$.*

REMARQUE 26. Réciproquement, si p est pair est ϕ_X est p fois dérivable en 0, alors X admet un moment d'ordre p. On peut construire X n'admettant pas d'espérance mais telle que ϕ_X soit dérivable en 0 (admis).

Caractérisation de l'indépendance de variables aléatoires, exemple
Théorème de LÉVY

THÉORÈME 27. [THÉORÈME CENTRAL LIMITE]
Si les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont i.i.d. de carré intégrable, alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$$

APPLICATION 28. [INTERVALLE DE CONFIANCE ASYMPTOTIQUE] [RS12, §3.4, p25]
Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des réalisations i.i.d. de $\mathcal{B}(p)$ pour un $p \in [0,1]$ inconnu. Le théorème central limite donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour p en fonction de la moyenne empirique $\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_i : \mathrm{IC}_\alpha(p) = \left[\hat{p}_n \pm \frac{q_{1-\alpha/2}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, où q_t est le quantile d'ordre t de $\mathcal{N}(0,1)$.

Théorème central limite poissonien

III. B. Vers la résolution d'EDP

[Bon01, §9.6, p184]

Transformée de FOURIER partielle.

APPLICATION 29. [RÉSOLUTION D'EDP]
- On considère l'équation de la chaleur $\partial_t u = \partial_x^2 u$ avec condition initiale $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ telle que $u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ uniformément en t sur tout compact et $u(t,.) \xrightarrow[t\to0]{} f$ dans L^1. Cette solution est donnée par :
$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy = f \star k_t(x) \quad \text{où } k_t = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\mathrm{e}^{-\frac{|.|^2}{4t}}$$
- On considère l'équation de SCHRÖDINGER $\partial_t u = i\partial_x^2 u$ avec condition initiale $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cette équation possède une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ telle que pour tout t, $u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément en t sur tout compact. On a :
$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\zeta)\,\mathrm{e}^{-i\zeta^2 t}\,\mathrm{e}^{ix\zeta}\,d\zeta$$

III. C. Polynômes orthogonaux

[BMP05, §3.4, p140]

THÉORÈME 30. [BASE HILBERTIENNE DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX]
Soit ρ une fonction de poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)dx < +\infty$, alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

EXEMPLE 31. Sans l'hypothèse on a le contre-exemple suivant : soit la fonction de poids $w : x \longmapsto x^{-\ln(x)}$ sur $I = \mathbb{R}_+$. Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne forme pas une base de $L^2(I, w)$.

ANNEXE

Quelques fonctions et leur transformée de FOURIER
Fonctions caractéristiques usuelles

COMMENTAIRES

Les points forts de la transformée de FOURIER :

- son injectivité sur les espaces sur lesquels elle est définie,
- la formule d'inversion sous certaines hypothèses,
- la simplification des calculs dans le domaine de FOURIER (typiquement, permutations des propriétés de convolution et de produit, équations dérivées partielles deviennent des équations différentielles ordinaires, ...).

L'intérêt de la transformée de FOURIER est donc de simplifier des calculs, via le troisième point, mais pour que cela soit un minimum intéressant, les deux premiers points sont nécessaires, on ne pourrait pas faire grand chose d'autre sinon !
Le théorème d'échantillonnage de SHANNON utilise a priori plutôt la transformée de FOURIER mais on peut le voir comme une utilisation des séries de FOURIER. On montre que la suite des translatées du sinus cardinal est une base hilbertienne de l'espace considéré. Les calculs faits reviennent à développer en série de FOURIER la fonction $x \longmapsto e^{-2i\pi ax}$, où $a \in \mathbb{R}$.

QUESTIONS

Q Théorème d'inversion ponctuelle, exemple ?

R Voir [BP15, Far00]. L'intérêt du théorème est surtout de faire l'analogie avec les séries de FOURIER.

Q Donner une fonction dans la classe de SCHWARTZ ? Pourquoi a-t-on densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans L^2 ?

R Une gaussienne. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ contient les fonctions $\mathcal{C}_K^\infty$, donc est dense dans L^2.

Q Avez-vous un exemple de fonctions $\mathcal{C}_K^\infty$?

R Voir l'exemple de suite régularisante.

Q Expliquer le principe de la marche aléatoire.

Q Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathbb{R}$. On considère $T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi \longmapsto \int \varphi d\mathbb{P}$. Cette application est-elle une distribution ? Peut-on calculer sa transformée de FOURIER ? Quelle est le lien avec la fonction caractéristique ?

R L'application est linéaire et continue puisque $|\langle T \mid \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \leq N_0(\varphi)$.
On calcule $\hat{T} = T_{-\phi_X}$.

Q Soit $f_q : t \longmapsto e^{-|t|^q}$ pour un entier $q \in \mathbb{N}$. Est-ce la transformée de FOURIER d'une certaine fonction ?

R La transformée de FOURIER de $1 \longmapsto 1 + x^2$ est f_1 (à une constante près).
Si $q \geq 3$, montrons que ce n'est pas une transformée de FOURIER. On a que f_q est $q-1$ fois dérivable en 0, elle a donc un moment d'ordre 2 égal à $f_q''(0) = 0$, par ailleurs $f_q'(0) = 0$, donc si X est une variable aléatoire de fonction caractéristique f_q, alors X est constante presque sûrement, égale à 0, et on vérifie que $\varphi_X = 1$, ce qui est absurde.

BIBLIOGRAPHIE

[BL07] P. BARBE et M. LEDOUX : *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Bon01] J.-M. BONY : *Théorie des distributions et analyse de* FOURIER. Les éditions de l'École Polytechnique, 2001.

[BP15] M. BRIANE et G. PAGÈS : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[Far00] J. FARAUT : *Calcul intégral*. Belin, 2000.

[Ouv09] J.-Y. OUVRARD : *Probabilités : Tome 2*. Cassini, 3ème édition, 2009.

[RS12] V. RIVOIRARD et G. STOLTZ : *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2 ème édition, 2012.

[Rud98] W. RUDIN : *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2ème édition, 1998.