246 SÉRIES DE FOURIER. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e_n = \mathrm{e}^{in\cdot}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On définit lorsque cela a un sens $\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ et $\|f\|_1 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$.

I. Coefficients et séries de Fourier

[Gou08, §4.5, p256–270] [QZ13, ChIV, p68]

I. A. Séries trigonométriques et coefficients de Fourier

Polynôme trigonométrique : polynôme en les $(e_n)_n$, coefficients c_n, a_n, b_n, liens entre les deux série trigonométrique, convergence normale dans certains cas

Définition 1. [coefficient de Fourier] Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt = \langle f \mid e_n \rangle$ le n-ième coefficient de Fourier de f, où $n \in \mathbb{Z}$.

Coefficients $a_n(f), b_n(f)$, nuls quand f est paire ou impaire
Par inclusion des L^p, le coefficient de Fourier est défini sur tout L^p, lien avec le produit scalaire surL^2

Exemple 2.

- $c_k(e_n) = \delta_{k,n}$
- Pour $f = \mathbb{1}_{]-a,a[}$ où $0 < a < \pi$, on a $c_n(f) = \begin{cases} a/\pi & \text{si } n = 0 \\ \sin(na)/n\pi & \text{sinon} \end{cases}$.
- Pour $f : x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, on a $c_n(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} & \text{sinon} \end{cases}$.

Proposition 3. *Pour $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, on a :*
(i) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$,
(ii) $c_n(\tau_a f) = \mathrm{e}^{ina}\,c_n(f)$,
(iii) $f * e_n = c_n(f)e_n$,
(iv) si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{T})$, *on a* $c_n(f') = inc_n(f)$.
(v) $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$,

Lemme 4. [lemme de Riemann-Lebesgue] *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors* $c_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}), f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est linéaire, de norme 1

I. B. Séries de Fourier et noyaux trigonométriques

Série de Fourier associée à f

Définition 5. [somme partielles de Fourier, de Fejér] On appelle somme partielle de Fourier d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la quantité $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$.
On appelle somme partielle de Fejér d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la quantité $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_N(f)$.

Remarque 6. Dans l'espace de Hilbert L^2, $S_N(f)$ est la projection sur $\mathcal{P}_N = \mathrm{Vect}((e_n)_{-N\le n\le N})$.

Exemple : si f est un polynôme trigonométrique

Définition 7. [noyaux de Dirichlet, de Fejér] On appelle noyau de Dirichlet à l'ordre $N \in \mathbb{N}$ la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$.
On appelle noyau de Fejér à l'ordre $N \in \mathbb{N}$ la fonction $K_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n = \sum_{n=-N}^{N}(1 - |n|/N)e_n$.

Proposition 8. *On a les propriétés suivantes :*

D1) $S_N(f) = f * D_N$,
D2) D_N *est pair et* $\|D_N\|_1 = 1$,
D3) $\forall x \in \mathbb{T}, D_N(x) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}$,

F1) $\sigma_N(f) = f * K_N$,
F2) $\|K_N\|_1 = 1$,
F3) $\forall x \in \mathbb{T}, K_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \geq 0$,
F4) $\forall \delta \in]0,\pi], \int_{\delta\le|t|\le\pi} K_N(t)dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

II. Convergences des séries de Fourier

[QZ13, ChIV, p68] [Gou08, ChIV.5] [BMP05, Ch3.3, p122]

II. A. Convergence au sens de Cesàro

Théorème 9. [théorème de Fejér]

- *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout $N \geq 1$ et $\sigma_N(f) = f * K_N \xrightarrow[N\to+\infty]{u} f$.*
- *Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour un $p \in [1,+\infty[$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout $N \geq 1$ et $\lim_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.*

Applications :

- si f est continue et $S_N(f)(x_0) \longrightarrow \ell$, alors $\ell = f(x_0)$,
- si f est continue et si $S_N(f)$ converge uniformément alors elle converge vers f,

- théorème de Weierstrass
- injectivité de $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}), f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exemple : fonction triangle

II. B. Convergence en moyenne quadratique

Inégalité de Bessel

Théorème 10. *$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$:*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n \qquad \text{et} \qquad \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Applications :

- deux fonctions L^1 ayant mêmes coefficients de Fourier sont égales p.p.
- convolution : si $f \in L^2$, alors $f * f = \sum_n c_n(f)^2 \, e_n$
- $\mathcal{F}$ est une isométrie bijective

Exemple : fonction signal : valeur au point limite $1/2$

II. C. Convergence ponctuelle et uniforme

[Bre99, II.1, p16–17] [Gou08, An. A, p404–405]

Contre-exemple si f n'est pas continue

Théorème 11. [Théorème de Banach-Steinhaus] *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}_c(E,F)$ simplement bornée (c'est-à-dire $\forall x \in E, \sup_{i\in I} \|u_i(x)\| \leq +\infty$). Alors $\sup_{i\in I} \|\|u_i\|\| < +\infty$.*

Application 12. Existence d'une fonction continue 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

Théorème 13. [Théorème de Jordan-Dirichlet] *Si f est $L^1(\mathbb{T})$ et telle qu'en x_0 elle admet limite à droite et à gauche, et si $h = \dots$ est bornée au voisinage de 0, alors $S_N(f)(x_0) \longrightarrow \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$*

Corollaire 14. [Théorème de Dirichlet] *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{T})$, alors $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers f.*

III. Applications

III. A. Calcul de séries

[Gou08, §IV.5, p256] [QZ13, ChIV, p68]

Application 15. [Calculs de séries] On peut reprendre l'Exemple 2 pour calculer les normes des applications dans L^2 : pour $a \in [\![0, 2\pi]\!]$: $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi-a}{2}$ (première fonction) et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (deuxième fonction).
On peut aussi calculer classiquement $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

III. B. Formule de Poisson

[Gou08, §IV.5/IV.6, p256/273] [FGN07, §4.16/17, p304–308]

Proposition 16. [Formule sommatoire de Poisson] *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ en $\pm\infty$. Alors les sommes suivantes sont bien définies et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{inx} \qquad \text{où } \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

Application 17. [Équation fonctionnelle de la fonction de Jacobi] Pour $s > 0$, $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}$ vérifie $\Theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Theta(\frac{1}{s})$.

III. C. Equation de la chaleur périodique

[FGN12, §1.28, p49] [QZ13, §IV.VI.3, p105]

Théorème 18. [Équation de la chaleur périodique] *Soit $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle, 2π-périodique continue et $\mathcal{C}^1_{pm}$.
Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telle que :*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial^2_{xx} u & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,.) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

ANNEXE

Fonction signal, triangle

SPEECH

Historiquement introduction pour l'étude des fonctions périodiques. Mais pas de réelle justification de la convergence des séries, ce que l'on voudrait étudier ici.

COMMENTAIRES

Attention à bien préparer les exemples, et à ne pas trop se disperser dans plusieurs livres avec plusieurs notations.
Ne pas justifier l'intérêt des séries de FOURIER par le calcul de sommes (juste le signaler rapidement).

QUESTIONS

Q À quoi correspond $S_N(f)$?

R C'est une projection sur l'espace vectoriel engendré par $\mathrm{e}_{-N}, \dots, \mathrm{e}_N$.

Q Pourquoi le noyau de FEJÉR fonctionne-t-il mieux que celui de DIRICHLET ?

Q Si f est $\mathcal{C}^0_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$, a-t-on convergence normale de la série de FOURIER ?

R On a puisque $f' \in L^2$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|c_n(f')|}{n} \leq \left(\sum_n |c_n(f')|^2\right)^{1/2} (\sum_n \frac{1}{n^2})^{1/2} \leq \left(\sum_n |c_n(f')|^2\right)^{1/2} \|f\|_2^2$$

On en déduit $\sum_{|n|\geq N} |c_n(f)| \leq \frac{2C\|f'\|_2}{\sqrt{N}}$. On a même $\sum_{|n|\geq N} |c_n(f)| = o(1/\sqrt{N})$.

Q Si l'on remplace $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$, qu'obtient-on ?

R On va trouver $o(1/\sqrt{N^{2k-1}})$.

Q Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ avec $c_n(f) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. A-t-on convergence de $S_N(f)$?

R Si $S_N(f)(0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\sigma_N(f)(0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: c'est absurde.

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Bre99] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.

[FGN07] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS : *Oraux X-ENS - Analyse 2*. Cassini, 2007.

[FGN12] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS : *Oraux X-ENS - Analyse 4*. Cassini, 2012.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.