245 FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{C}$. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

I. Fonctions holomorphes

[Tau06, §3.4/Ch5, p39/58]

I. A. Holomorphie, différentiabilité, analycité

Fonction holomorphe

Exemple 1. Soit $f : z \longmapsto \frac{1}{z}$. Alors pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a si $|h| < |z|$:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = -\frac{1}{(z+h)z} \underset{|h|\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{z^2}$$

Donc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$.

Stabilité par somme, produit, composition, inverse, selon les hypothèses ...
Équations de Cauchy-Riemann, application : $f' = 0$ implique f contante sur U sur un connexe, puis f contante sur U correspond à $\Re(f)$ constante correspond à $|f|$ constante, etc
Fonction analytique (c'est-à-dire développable en série entière en tout point)

Définition 2. **[Fonction développable en série entière, analytique, entière]**

- On dit que f est développable en série entière au voisinage de $z_0 \in \Omega$ s'il existe $r > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\mathbb{D}_r(a) \subset \Omega$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ sur $\mathbb{D}_r(a)$,
- On dit que f est analytique sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω,
- Si $\Omega = \mathbb{C}$, f est dite entière si elle est analytique.

Exemple 3. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$ est développable en série entière en 0.

On supposera dans la suite f analytique.

Proposition 4. *Si f admet un développement en série entière sur $\mathbb{D}_R(0)$ autour de 0, alors pour tout $z_0 \in \mathbb{D}_R(0)$, le développement en série entière de f en z_0 a un rayon de convergence au moins égal à $R - |z_0|$ et coïncide avec f sur $\mathbb{D}_{R-|z_0|}(z_0)$.*

DSE implique holomorphe, relation entre les dérivées et les coefficients du DSE, exemple de l'exponentielle

I. B. Application : détermination continue du logarithme

Définition 5.

- Un argument continu sur Ω est une application continue $\Theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $z \in \Omega$, $\frac{z}{|z|} = \varepsilon \circ \Theta(z)$.
- Un logarithme continu sur Ω est une application continue $\ell : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \Omega$, $z = \exp \circ \ell(z)$.

Proposition 6. *Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.*

- *Il existe un argument continu Θ sur Ω. Si on suppose de plus Θ à valeurs dans $]-\pi,\pi[$, on a alors unicité et on appelle Θ la détermination principale de l'argument,*
- *Il existe un logarithme continu sur Ω.*

Application : détermination continue de z^α

II. Intégrales sur des chemins

[Tau06, Ch6, p67]

II. A. Définitions

Arcs, chemins, intégrales le long d'un chemin, exemples de $z \longmapsto z$, $z \longmapsto \overline{z}$, $z \longmapsto z^{-1}$
L'intégrale est invariante par chemins équivalents, opposée par chemin opposé

II. B. Théorie de Cauchy

f continue admet une primitive sur Ω si et seulement si pour tout chemin fermé, $\int_\gamma f(z)dz = 0$
Sur un convexe, f admet une primitive dès que $\int_T f(z)dz = 0$ pour tout triangle
Théorème de Goursat, formule de Cauchy 1 : $\int_\gamma f(z)dz = 0$
Lemme de l'indice, exemple (en annexe)
Formule de Cauchy 2, exemples

Corollaire 7. *Une fonction holomorphe est analytique. Plus précisément si $\mathbb{D}(z_0,R) \subset U$ et f est holomorphe sur U alors f est développable en série entière sur $\mathbb{D}(z_0,R)$ et on a pour tout chemin γ d'indice 1 en z_0 :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds$$

En particulier f est $\mathcal{C}^\infty$
Dans le cas réel, le développement en série entière est beaucoup moins puissant. En effet :

Exemple 8. Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ peut ne pas être développable en série entière en un point. Considérer par exemple en 0 la fonction $f : x \longrightarrow \mathrm{e}^{-1/x^2}\mathbb{1}_{x>0}$.

Inégalité de Cauchy

III. Propriétés des fonctions holomorphes [Tau06, Ch7, p84]

III. A. Propriétés liées à l'analycité et/ou l'holomorphie

Formule de la moyenne, principe du maximum
Lemme de SCHWARZ, automorphismes du disque

THÉORÈME 9. [THÉORÈME DES ZÉROS ISOLÉS]
Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est non nulle, l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation.

Théorème de LIOUVILLE

III. B. Convergence de suites de fonctions holomorphes [BMP05, §2.7, p82]

Convergence uniforme sur tout compact implique fonction limite holomorphe

THÉORÈME 10. [HOLOMORPHIE SOUS LE SIGNE INTÉGRALE]
Supposons que U est un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que :
- *pour tout $z \in \Omega$, $x \longmapsto f(z,x)$ est mesurable sur E,*
- *pour μ-presque tout x, $u \longmapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Ω,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $z \in \Omega$, $|f(z,x)| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors F est holomorphe sur Ω et pour tout $k \geq 0$, $F^{(k)} : z \longmapsto \int_E \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z,x)d\mu(x)$.

Prolongement des fonctions holomorphes (par le théorème des zéros isolés)

EXEMPLE 11. Γ est holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$.

APPLICATION 12. Γ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$. Celui-ci ne s'annule pas et de plus $1/\Gamma$ est une fonction entière.

IV. Fonctions méromorphes [Tau06, Ch8, p98]

IV. A. Singularités isolées

Singularité isolée, 3 cas possibles, tous distincts
Pôle simple, pôle multiple, résidu, exemples
Fonction méromorphe

IV. B. Calculs d'intégrales

THÉORÈME 13. [THÉORÈME DES RÉSIDUS]
Soit U un ouvert convexe ou étoilé (ou simplement convexe). Soit f méromorphe sur U. On note P l'ensemble de pôles de f. Alors pour $\gamma : [0,1] \longrightarrow U \setminus P$ chemin fermé, on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a\in P} \mathrm{Res}(f,a)\ \mathrm{Ind}(\gamma,a)$$

APPLICATION 14. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-x^2)\cos(\alpha x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-\alpha^2/4)$.

APPLICATION 15. On retrouve $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$ ou $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

EXEMPLE 16. Soit $-1 < \alpha < 1$. Alors $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln(x)}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\pi}{2}\alpha)}$.

Autres exemples

ANNEXE

Exemples de contours, dessins d'indices

SPEECH

On étend la notion de dérivée pour des fonctions de variables complexes. En fait cette nouvelle notion va donner une structure extrêmement forte qui va découler sur toute une théorie.

COMMENTAIRES

C'est une leçon vaste, rester sur ce que l'on maitrise.

QUESTIONS

Q Soit $f : t \longmapsto 1/(1+t^2)$. f est la restriction d'une fonction holomorphe sur un voisinage de $\mathbb{R}$. Pourquoi le rayon de convergence n'est pas infini ?

R $\pm i$ sont pôles.

Q Quelle est la caractérisation géométrique d'une fonction holomorphe ?

R La différentielle d'une fonction holomorphe préserve les angles.

Q Interprétation géométrique de l'indice ?

Q Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes convergeant vers f holomorphe, telle que les $(f_n)_n$ ne s'annulent pas. Que dire de f ?

R f est soit nulle, soit ne s'annule pas. Supposons f non nulle.
En admettant la formule $N = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ le nombre de 0 dans l'ouvert délimité par γ tel que f ne s'annule pas sur γ.
Si a est un zéros de f, on prend un chemin autour de γ et $N_n = 0$ pour tout n puisque les $(f_n)_n$ ne s'annulent pas. Par convergence uniforme, $N_n \longrightarrow N$ donc $N = 0$. Absurde.
Il faut vérifier la convergence uniforme sur tout compact de $\frac{f_n'}{f_n}$ vers $\frac{f'(z)}{f(z)}$, on utilise les convergences uniformes de f_n' vers f' et de f_n vers f.

Q On rappelle le théorème de BAIRE : si (X,d) est métrique et les $(F_n)_n$ sont des fermés tels que $\mathbb{F}_n^\circ = \varnothing$, alors $(\cup_n F_n)^\circ = \varnothing$. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}, \exists n_0 \mid f^{(n)}(z) = 0$. Montrer que f est un polynôme.

R On a $\mathbb{C} = \cup_{n\geq 0} Z(f^{(n)})$. $Z(f^{(n)})$ est un fermé. Si $f^{(n)} \neq 0$ alors par le théorème des zéros isolés $Z(f^{(n)})$ est d'intérieur vide. Si c'est le cas pour tout n, par BAIRE on aurait $\mathbb{C} = \varnothing$. Donc $f^{(n_0)} = 0$ pour un n_0. Donc f est un polynôme.

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Tau06] P. TAUVEL : *Analyse complexe pour la Licence 3*. Dunod, 2006.