243 CONVERGENCE DES SÉRIES ENTIÈRES, PROPRIÉTÉS DE LA SOMME. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Généralités

[Gou08, §4.4, p236–256] [BMP05, §2.1/2.2, p47–56]

I. A. Série entière et rayon de convergence

Définition 1. [Série entière]
On appelle série entière toute fonction de la forme $z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition 2. [Rayon de convergence]
On définit le rayon de convergence de la série entière par le réel $R = \sup(\{r \geq 0 \mid (|a_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\})$.

Exemple 3. La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Soit désormais $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Proposition 4. [Lemme d'Abel]

- *Si $|z| < R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument,*
- *La série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ convergence normalement sur $\mathbb{D}_r(0)$ pour tout $r < R$. En particulier, la série entière est continue sur $\mathbb{D}_R(O)$,*

Exemple 5. On n'a pas forcément continuité sur $\overline{\mathbb{D}}_R(0)$! Considérer par exemple $\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n = \frac{1}{1-z}$ sur $\mathbb{D}_1(0)$, prolongeable en 1 par $1/2$ mais dont la série en 1 diverge.

Proposition 6.

- *Si $|z| > R$, la série $\sum a_k z^k$ diverge (grossièrement),*
- *La série entière $\sum a_k z^k$ convergence normalement sur tout compact $K \subset \mathbb{D}_R(0)$.*

Exemple 7. [Différents comportements possibles sur le cercle $\mathscr{C}_R(0)$]

- $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge en tout point de $\mathscr{C}_1(0)$,
- $\sum_{n\geq 0} z^n/n$ converge en tout point de $\mathscr{C}_1(0)$ sauf en 1,
- $\sum_{n\geq 0} z^n/n^2$ converge en tout point de $\mathscr{C}_1(0)$.

Théorème 8. [Règles de d'Alembert et de Cauchy]

i) Si $a_{n+1}/a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in [0,+\infty]$, alors $R = 1/\lambda$.

ii) Si $\sqrt[n]{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in [0,+\infty]$, alors $R = 1/\lambda$.

Exemple 9. Pour $a_n = \begin{cases} 1/3^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 4/3^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, on peut appliquer la règle de Cauchy mais pas la règle de Hadamard.

Corollaire 10. [Formule de Cauchy-Hadamard]
On a $R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Exemple 11. $\sum_{n\geq 0} n^a z^n$, où $a \in \mathbb{R}$, a un rayon de convergence égal à 1.
$\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $1/e$.

I. B. Opérations sur les séries entières

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.

Proposition 12. *Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(|b_n|)$ alors $R_a \geq R_b$.*

Proposition 13. [Somme de séries entières]
$\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ a un rayon de convergence R supérieur à $\min(R_a, R_b)$ et on a :

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)), \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

Définition 14. [Produit de Cauchy]
On définit la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, appelée produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$. On note R_c sont rayon de convergence.

Proposition 15. [Produit de Cauchy]
On a $R_c \geq \min(R_a, R_b)$ et :

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)), \sum_{n\geq 0} c_n z^n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)$$

Exemple 16. Les rayons des sommes/produits peuvent être distincts de $\min(R_a, R_b)$:

- $\sum_{n\geq 0}(1+2^n)z^n + \sum_{n\geq 0}(1-2^n)z^n = \sum_{n\geq 0} z^n$ — $(R_a, R_b, R) = (1/2, 1/2, 1)$.
- $(1-z)\sum_{n\geq 0} z^n = 1$ — $(R_a, R_b, R_c) = (+\infty, 1, +\infty)$.
- $\begin{cases} a_n = 2\mathbb{1}_{n=0} + 2^n \mathbb{1}_{n\geq 1} \\ b_n = -\mathbb{1}_{n=0} + \mathbb{1}_{n\geq 1} \end{cases} \implies c_n = -2\mathbb{1}_{n=0}$ — $(R_a, R_b, R_c) = (1/2, 1, +\infty)$.

II. Régularité de la somme [Gou08, §4.4, p236–256] [BMP05, §2.1/2.2, p47–56]

II. A. Régularité sur le disque de convergence, restriction à $\mathbb{R}$

Soit $f : z \longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On a vu que f est continue sur $\mathbb{D}_R(0)$, normalement sur tout compact.

Théorème 17. *f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (dérivable au sens complexe) sur $\mathbb{D}_R(0)$, de dérivée $f' : z \longrightarrow \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$, qui a pour rayon de convergence R.*

Corollaire 18. *On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Remarque 19. Ainsi f coïncide sur $\mathbb{D}_R(0)$ avec sa série de Taylor en 0.

Soit désormais $f : x \longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ définie sur $]-R, R[$ où $R > 0$.

Corollaire 20. [Régularité]
f est C^∞ sur $]-R, R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R, R[$, on a $f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} \frac{n!}{k!} a_n x^{n-k}$.

Corollaire 21. *La série $F : x \longrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une primitive de f sur $]-R, R[$.*

Exemple 22. Développements de $\log(1+.)$, $\arctan$, $\arcsin$, argth, argsh.

II. B. Convergence sur le cercle

Théorème 23. [Théorème d'Abel] *[Gou08, p252-253]*
Soit $f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Alors pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$, on a $\lim_{z\to 1, z\in\Delta_\alpha} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n$, où

$$\Delta_\alpha = \left\{1 - \rho e^{i\theta} \in \mathbb{D}(0,1) \mid |z| < 1, \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha]\right\}$$

Théorème 24. [Théorème taubérien faible] *[Gou08, p253-254]*
Soit $f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $a_n = o(1/n)$ et qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} S$. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} a_n = S$.

Théorème 25. [Théorème taubérien fort]
Le résultat précédent est toujours vrai si l'on suppose $a_n = O(1/n)$.

III. Fonctions développables en série entière
[Gou08, §4.4, p236–256] [BMP05, §2.1/2.2, p47–56]

III. A. Sur $\mathbb{C}$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose $0 \in \Omega$ (sinon on translate la fonction).

Définition 26. [Fonction développable en série entière, analytique, entière]
- On dit que f est développable en série entière au voisinage de $z_0 \in \Omega$ s'il existe $r > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\mathbb{D}_r(a) \subset \Omega$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$ sur $\mathbb{D}_r(a)$,
- On dit que f est analytique sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω,
- Si $\Omega = \mathbb{C}$, f est dite entière si elle est analytique.

Exemple 27. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$ est développable en série entière en 0.

On supposera dans la suite f analytique.

Proposition 28. *Si f admet un développement en série entière sur $\mathbb{D}_R(0)$ autour de 0, alors pour tout $z_0 \in \mathbb{D}_R(0)$, le développement en série entière de f en z_0 a un rayon de convergence au moins égal à $R - |z_0|$ et coïncide avec f sur $\mathbb{D}_{R-|z_0|}(z_0)$.*

Théorème 29. [Formule de Cauchy]
Pour tout $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(r e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$.

Théorème 30. [Théorème des zéros isolés]
Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est non nulle, l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation.

Corollaire 31. [Unicité du développement en série entière]
Deux séries entières sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Corollaire 32. [Théorème de Liouville]
Une fonction entière est bornée si et seulement si elle est constante.

Application 33. Une fonction entière telle que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq P(|z|)$ où $P \in \mathbb{R}_+[X]$ est un polynôme de degré inférieur à $\deg(m)$.
Une fonction entière qui évite deux valeurs est constante **[Petit théorème de Picard]**.

Proposition 34. [Holomorphie]
$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est analytique.
Dans ce cas, on a pour tout $z_0 \in \Omega$, $g(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ au voisinage de z_0.

III. B. Sur $\mathbb{R}$

Dans le cas réel, le développement en série entière est beaucoup moins puissant. En effet :

EXEMPLE 35. Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ peut ne pas être développable en série entière en un point. Considérer par exemple en 0 la fonction $f : x \longrightarrow \mathrm{e}^{-1/x^2}\,\mathbb{1}_{x>0}$.

THÉORÈME 36. *[RDO98] Si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0, alors f est développement en série entière en 0 si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que $]-\alpha,\alpha[\subset I$ et $\forall x \in]-\alpha,\alpha[$, $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

THÉORÈME 37. [THÉORÈME DE BERNSTEIN] *Soit $a > 0$ et $f :]-a,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout entier k, $f^{(2k)} \geq 0$ sur $]-a,a[$. Alors f admet un développement en série entière sur $]-a,a[$.*

IV. Applications

IV. A. Exponentielle complexe [Rud98, Prologue, p1–4] [AF93, §VI.7, p226]

DÉFINITION 38. [EXPONENTIELLE, COSINUS ET SINUS] On définit les séries entières suivantes :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \quad \cos(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \sin(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

PROPOSITION 39.
- *(i) $\exp, \sin, \cos$ sont des séries entières de rayon de convergence infini et sont donc définies et holomorphes sur $\mathbb{C}$. De plus $\exp$ est sa propre dérivée,*
- *(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$,*
- *(iii) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont réels et $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = 1$.*
- *(iv) $\exp$ est un morphisme surjectif de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.*
- *(v) Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$,*

COROLLAIRE 40. [FORMULE DE MOIVRE ET D'EULER]
- *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.*
- *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.*

APPLICATION 41. Développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ par la formule de MOIVRE. Linéarisation de $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ par les formules d'EULER. Exemples de $\cos^5(\theta)$ et $\sin(5\theta)$. Polynômes de TCHEBYCHEV.

IV. B. Équations différentielles [QZ13, §X.VI, p408/435] [Gou08, p245]

Il est souvent judicieux de rechercher des solutions particulières d'équations différentielles sous forme de série entière, notamment lorsque les fonctions coefficients sont des polynômes.

THÉORÈME 42. *Soient $p(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n\geq 0} q_n x^n$ convergeant pour $x \in]-R,R[$ où $R > 0$. Alors pour tout $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution y sur $]-R,R[$ de $y'' + py' + qy = 0$ avec $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$, y étant développable en série entière.*

APPLICATION 43. Calcul des solutions de $y'' + xy = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, de $(1-x^2)y'' - xfy' = 2$ sur $]-1,1[$ ou de $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$ sur $]0,1[$.

IV. C. Combinatoire : dérangements de n [Rom17, Ch2, p53/73] [FGN07, §I.2–6, p6]

DÉFINITION 44. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle dérangement de n une permutation de $[\![1,n]\!]$ sans point fixe. On note d_n le nombre de dérangements de n.

PROPOSITION 45. *On a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$.*

PROPOSITION 46. *Soit $f : z \longrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$.*
- *Le rayon de convergence de f est supérieur à 1,*
- *$x \longmapsto f(x)\exp(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$,*
- *$d_n = n!\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.*

IV. D. La fonction génératrice en probabilités [Mé11, p62/188]

DÉFINITION 47. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa fonction génératrice g_X par $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=n)s^n$.

C'est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et $g_X(1) = 1$.

EXEMPLE 48. Fonctions génératrices de $\mathcal{B}(p), \mathcal{B}(n,p), \mathcal{P}(\lambda), \mathcal{G}(p)$.

PROPOSITION 49. *X admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si g_X est p fois dérivable en 1, et dans ce cas $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-p)]$.*

PROPOSITION 50. *Si X et Y ont même fonction génératrice, elles ont même loi.*

APPLICATION 51. [PROCESSUS DE BRANCHEMENT DE GALTON-WATSON] Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus de branchement de GALTON-WATSON de loi μ. Alors $g_{Z_n} = g_\mu^{\otimes n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\mu \neq \delta_0$, on a $\mathbb{P}(\text{survie du processus}) > 0 \iff \mathbb{E}[\mu] > 1$.

ANNEXE

Schéma des différents types de convergences [BMP05, p48]
Schéma de Δ_α.
Principaux développements en série entière.

QUESTIONS

Q Quel critère est le plus fort : Cauchy ou Hadamard ?

Q Qu'en est-il de la composition de séries entières ?

Q Développement en série entière de $\arctan(x+a)$.

BIBLIOGRAPHIE

[AF93] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse : *Cours de mathématiques, Tome 1, Algèbre*. Dunod, 1993.

[BMP05] V. Beck, J. Malick et G. Peyré : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[FGN07] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas : *Oraux X-ENS - Algèbre 1*. Cassini, 2007.

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Mé11] S. Méléard : *Aléatoire : introduction à la théorie et au calcul des probabilités*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2011.

[QZ13] H. Queffélec et C. Zuily : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[RDO98] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux : *Cours de mathématiques 4, Séries et équations différentielles*. Dunod, 1998.

[Rom17] J.-E. Rombaldi : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.

[Rud98] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2ème édition, 1998.