241 SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES.

I. Convergences

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions et f une fonction, toutes définies sur un même ensemble E et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. A. Autour de la convergence uniforme [Gou08, §4.3, p220-222] [QZ13, §V.III, p149]

Définition 1. [Convergences simple, uniforme]
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si pour tout $x \in E$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si $\sup_E |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 2. $(x \longmapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais pas uniformément vers 0 sur $[0, 1[$.

Théorème 3. *Soient E un espaces métrique. Soit $a \in E$. On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$ sur un voisinage de a et que les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues en a. Alors f est continue en a.*

Proposition 4. [Critère de Cauchy uniforme]
Il existe une fonction g telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} g$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall p, q \geq N, \forall x \in E, |f_p - f_q|(x) \leq \varepsilon$$

Remarque 5. $\mathcal{C}_b(X, \|.\|_\infty)$ est complet (où X est un espace métrique complet).

Théorème 6. [Théorème d'Arzela-Ascoli]
Supposons E compact. Alors on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite uniformément convergente si et seulement si pour tout $x \in E$:
(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in E, d(x, y) \leq \eta \Longrightarrow d(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon$,
(ii) $F_x = \{f_n(x) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ *est relativement compact.*

Théorème 7. [Théorème de Weierstrass] *[QZ13, §XIII.II.1, p518–519]*
$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}, \|.\|_\infty)$ pour $a < b \in \mathbb{R}$.

Définition 8. [Convergences de séries de fonctions]
On définit de même les convergences simple et uniforme d'une série de fonctions. On dit que $\sum f_k$ converge normalement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$.

Exemple 9. La série de terme général $f_n : x \longmapsto \frac{1}{x+n^2}$ converge normalement pour $x \in [a, A]$ où $0 < a < A$.

Théorème 10. *La convergence normale implique la convergence uniforme.*

Exemple 11. La réciproque est fausse. Considérer $f_n = \frac{1}{n+1}\mathbb{1}_{[n,n+1[}$.

Proposition 12. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $f_n' \underset{n\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} g$ et $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{s}{\longrightarrow}} f$.*
Alors $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$ et $f' = g$.

Remarque 13. La preuve de ce théorème utilise le Théorème 21.

Corollaire 14. *Si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})$ et telles que $f_n^{(p)} \underset{n\to+\infty}{\overset{s}{\longrightarrow}} g_p$ pour $p \leq k$ avec $f_n^{(k)} \underset{n\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} g_k$, alors $g_0 \in \mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})$, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} g$ et $g_0^{(p)} = g_p$ pour $p \leq k$.*

Exemple 15. Soit $f_u : t \longmapsto \exp(tu)$ ($u \in \mathbb{R}$). Alors f_u est $\mathcal{C}^\infty$ et $f_u^{(p)} : t \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^{n-p}}{(n-p)!} u^n$.

Exemple 16. [Hau07, p241] Importance de la convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$: considérer $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

I. B. Convergence en théorie de l'intégration [Gou08, §4.3, p222] [BP15, Ch7/8, p115–157]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème 17. [Convergence dominée]
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables telles que :
- *$\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe et vaut f μ- p.p.,*
- *il existe g intégrable sur E telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ- p.p.pour tout $n \geq 0$.*

Alors f est intégrable et $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \,d\mu = 0$ (et donc $\int_E f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu$).

Exemple 18.
- L'hypothèse d'intégrabilité est nécessaire : considérer $f_n = 1/n$ sur $\mathbb{R}_+$.
- L'hypothèse de domination est cruciale : considérer $f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

Application 19. $\int_0^n (1+x/n)^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \le 1 \\ 1/(\alpha-1) & \text{sinon} \end{cases}$.

Corollaire 20. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables telles que $\sum_{n\ge0}\int_X |f_n|\,d\mu < +\infty$, alors les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum_{n\ge0} f_n$ sont intégrables et on a :*

$$\int_E \sum_{n\ge0} f_n d\mu = \sum_{n\ge0}\int_E f_n d\mu$$

Corollaire 21. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ alors f est continue et $\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt$.*

Définition 22. [convergence L^p]
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans L^p si ce sont des éléments de L^p et si $\|f_n - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 23. *La convergence L^p implique la convergence μ- p.p.d'une sous-suite.*

Exemple 24. Stroboscope (bosses roulantes) : on n'a pas convergence simple de la suite.

Définition 25. [approximation de l'unité et suite régularisante]
Une suite $(\alpha_n)_{n\ge1}$ de fonctions positives de L^1 est une approximation de l'unité si :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}^d}\alpha_n d\lambda_d = 1$,
- pour tout $\varepsilon>0$, on a $\lim_{n\to+\infty}\int_{\{x\ge\varepsilon\}}\alpha_n d\lambda_d = 0$.

Si de plus les $(\alpha_n)_{n\ge1}$ sont de classe $\mathcal{C}_c^\infty$, alors on dit que c'est une suite régularisante.

Exemple 26. [existence d'une suite régularisante]
On considère $\phi : x \longmapsto \exp(\frac{1}{\|x\|^2-1})\mathbb{1}_{[0,1]}(\|x\|)$ puis $\alpha : x \longmapsto \frac{\phi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d}\phi d\lambda_d}$.
Alors la suite $\alpha_n : x \longrightarrow n^d\alpha(nx)$ est une suite régularisante.

Proposition 27. *Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante et $f\in L^p$. Alors $(\rho_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ qui converge vers f dans L^p.*

Corollaire 28. *$\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans L^p.*

II. Séries entières

[Gou08, §4.4, p236–256]

Définition 29. [série entière]
On appelle série entière toute fonction de la forme $z \longmapsto \sum_{n\ge0} a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition 30. [rayon de convergence]
On définit le rayon de convergence de la série entière par le réel $R = \sup(\{r\ge0 \,|\, (|a_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\})$.

Exemple 31. La série entière $\sum_{n\ge0}\frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Soit désormais $\sum_{n\ge0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Proposition 32. [lemme d'Abel]

- *Si $|z|<R$, la série $\sum_{n\ge0} a_n z^n$ converge absolument,*
- *La série entière $\sum_{n\ge0} a_n z^n$ convergence normalement sur $\mathbb{D}_r(0)$ pour tout $r<R$. En particulier, la série entière est continue sur $\mathbb{D}_R(O)$,*

Exemple 33. On n'a pas forcément convergence ou continuité sur $\overline{\mathbb{D}}_R(0)$! Par exemple $\sum_{n\ge0}(-1)^n z^n = \frac{1}{1-z}$ sur $\mathbb{D}_1(0)$, prolongeable en 1 par $1/2$ mais dont la série en 1 diverge.

Proposition 34.

- *Si $|z|>R$, la série $\sum a_k z^k$ diverge (grossièrement),*
- *La série entière $\sum a_k z^k$ convergence normalement sur tout compact $K\subset\mathbb{D}_R(0)$.*

Exemple 35. [différents comportements possibles sur le cercle $\mathscr{C}_R(0)$]

- $\sum_{n\ge1} z^n$ diverge en tout point de $\mathscr{C}_1(0)$,
- $\sum_{n\ge1} z^n/n$ converge en tout point de $\mathscr{C}_1(0)$ sauf en 1,
- $\sum_{n\ge1} z^n/n^2$ converge en tout point de $\mathscr{C}_1(0)$.

Théorème 36. [règles de d'Alembert et de Cauchy]

i) Si $a_{n+1}/a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\in[0,+\infty]$, alors $R=1/\lambda$.

ii) Si $\sqrt[n]{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\in[0,+\infty]$, alors $R=1/\lambda$.

Exemple 37. Pour $a_n = \begin{cases} 1/3^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 4/3^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, on peut appliquer la règle de Cauchy mais pas la règle de Hadamard.

Théorème 38. *$f : \mathbb{D}_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses dérivées sont des séries entières de rayon de convergence R.*

Application 39. Si $\sum a_k z^k$ et $\sum b_k z^k$ sont des séries entières de rayons de convergence R_a et R_b, alors leur produit de Cauchy a un rayon de convergence supérieur à $\min(R_a, R_b)$.

III. Séries de Fourier
[Gou08, Ch4.5, p256–270] [QZ13, Ch4, p68–135] [BMP05, §3.3.3/3.3.4, p127]

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e_n = \mathrm{e}^{in\cdot}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On définit lorsque cela a un sens $\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ et $\|f\|_1 = \sqrt{\langle f \mid f\rangle}$.

Définition 40. [Coefficient de Fourier] Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt = \langle f \mid e_n\rangle$ le n-ième coefficient de Fourier de f, où $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 41.

- Pour $f = \mathbb{1}_{]-a,a[}$ où $0 < a < \pi$, on a $c_n(f) = \begin{cases} a/\pi & \text{si } n = 0 \\ \sin(na)/n\pi & \text{sinon} \end{cases}$.
- Pour $f : x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, on a $c_n(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} & \text{sinon} \end{cases}$.

Proposition 42. *Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a :*

(i) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$,
(ii) $c_n(\tau_a f) = \mathrm{e}^{ina}\, c_n(f)$,
(iii) $f * e_n = c_n(f) e_n$,
(iv) si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{T})$, on a $c_n(f') = in c_n(f)$.

Lemme 43. [Lemme de Riemann-Lebesgue] *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $c_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Définition 44. [Somme partielles de Fourier, de Fejér] On appelle somme partielle de Fourier d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la quantité $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$.
On appelle somme partielle de Fejér d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la quantité $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_N(f)$.

Remarque 45. On peut voir $S_N(f)$ comme la projection sur $\mathcal{P}_N = \mathrm{Vect}((e_n)_{-N\leq n\leq N})$.

Définition 46. [Noyaux de Dirichlet, de Fejér] On appelle noyau de Dirichlet à l'ordre $N \in \mathbb{N}$ la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$.
On appelle noyau de Fejér à l'ordre $N \in \mathbb{N}$ la fonction $K_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n = \sum_{n=-N}^{N}(1 - |n|/N)e_n$.

Proposition 47. *On a les propriétés suivantes :*

D1) $S_N(f) = f * D_N$,
D2) D_N *est pair et* $\|D_N\|_1 = 1$,
D3) $\forall x \in \mathbb{T}, D_N(x) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}$,

F1) $\sigma_N(f) = f * K_N$,
F2) $\|K_N\|_1 = 1$,
F3) $\forall x \in \mathbb{T}, K_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \geq 0$,
F4) $\forall \delta \in]0, \pi], \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_N(t)dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 48. [Théorème de Fejér]

- *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout $N \geq 1$ et $\sigma_N(f) = f * K_N \underset{N\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$.*
- *Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour un $p \in [1, +\infty[$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout $N \geq 1$ et $\lim_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.*

Remarque 49. On peut retrouver le théorème de Weierstrass à partir du premier résultat.

Application 50. $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}), f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective.

Théorème 51. *$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$:*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n \qquad \text{et} \qquad \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Application 52. [Calculs de séries] On peut reprendre l'Exemple 41 pour calculer les normes des applications dans L^2 : pour $a \in [\![0, 2\pi]\!]$: $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$ (première fonction) et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (deuxième fonction).
On peut aussi calculer classiquement $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Théorème 53. *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{T})$, alors $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers f.*

Exemple 54. Contre-exemple sans l'hypothèse $\mathcal{C}^1_{pm}$: il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $(S_N(f)(0))_{N\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (c'est un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus).

COMMENTAIRES

Références pour la théorie de FOURIER : [SS03, QZ13].

QUESTIONS

- Q Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f est limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$. Que dire de f ?
- Q Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires (pas forcément indépendantes) de lois respectives $\mathcal{E}(n^2)$. Montrer que $\sum X_k$ convergence dans L^2 et presque surement.
- Q On pose $f : x \longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
  1) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
  2) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution d'une ÉDO linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
  3) Quelle est la limite de f en $+\infty$?
  4) f est-elle dérivable en 0 ?
- Q On prend une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante qui tend vers $+\infty$ avec $u_n > 0$ pour tout n. On s'intéresse à la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \exp(-u_n .)$. Cette application est-elle bien définie ? La somme de la série est-elle continue ? Peut-on calculer la valeur de l'intégrale entre 0 et $+\infty$ de cette fonction ?

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[BP15] M. BRIANE et G. PAGÈS : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Hau07] D. HAUCHECORNE : *Les contre-exemples en Mathématiques*. Ellipses, 2ème édition, 2007.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[SS03] E. STEIN et R. SHAKARCHI : *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.