239 FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Généralités sur les intégrales à paramètre

I. A. Régularité

[BP15, §8.3, p140–147] [BMP05, §2.7, p82]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et U un espace métrique. On considère $f : U \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ et on pose lorsque cela à un sens $F(t) = \int_E f(t,x)d\mu(x)$ pour $t \in U$.

Théorème 1. [Continuité sous le signe intégrale]
Supposons que :

- *pour tout $t \in U$, $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable,*
- *pour μ-presque tout x, $u \longmapsto f(t,x)$ est continue en t_0,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $t \in U$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors F est bien définie sur U et est continue en t_0.

Application 2. Continuité de la transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 3. [Dérivation sous le signe intégrale]
Si U est un intervalle I de $\mathbb{R}$, supposons que :

- *pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est intégrable sur E,*
- *pour μ-presque tout x, $u \longmapsto f(t,x)$ est dérivable sur I,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $t \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors F est définie, dérivable sur I et $F' : t \longmapsto \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)d\mu(x)$.

Application 4. Prenant $f : (t,x) \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}$, on montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Corollaire 5. [Dérivation multiple sous le signe intégrale]
Si U est un intervalle I de $\mathbb{R}$, supposons que pour un $k \in \mathbb{N}^*$:

- *pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est intégrable sur E,*
- *pour μ-presque tout x, $t \longmapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^k$ sur I,*
- *pour $1 \leq i \leq k$, il existe g_i intégrable telle que pour tout $u \in I$, $\left|\frac{\partial^i f}{\partial u^i}(t,x)\right| \leq g_i(x)$ μ- p.p..*

Alors F est $\mathcal{C}^k$ sur I et $F^i : t \longmapsto \int_E \frac{\partial^i f}{\partial t^i}(t,x)d\mu(x)$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

Exemple 6. La fonction $\Gamma : z \longmapsto \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{z-1}dt$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 7. [Holomorphie sous le signe intégrale]
Supposons que U est un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que :

- *pour tout $z \in \Omega$, $x \longmapsto f(z,x)$ est mesurable sur E,*
- *pour μ-presque tout x, $u \longmapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Ω,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $z \in \Omega$, $|f(z,x)| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors F est holomorphe sur Ω et pour tout $k \geq 0$, $F^{(k)} : z \longmapsto \int_E \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z,x)d\mu(x)$.

Exemple 8. Γ est holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$.

Application 9. Γ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$. Celui-ci ne s'annule pas et de plus $1/\Gamma$ est une fonction entière.

I. B. Comportement asymptotique

[Gou08, §3.4, p159]

Théorème 10. [Intégration des relations de comparaison]
Soient $I = [a, b[$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ des applications continues par morceaux sur I. Alors lorsque $x \to b^-$:

	$f = o(g)$	$f = O(g)$	$f \sim g$
$\int_a^b g < +\infty$	$\int_x^b f = o(\int_x^b g)$	$\int_x^b f = O(\int_x^b g)$	$\int_x^b f \sim \int_x^b g$
$\int_a^b g = +\infty$	$\int_a^x f = o(\int_a^x g)$	$\int_a^x f = O(\int_a^x g)$	$\int_a^x f \sim \int_a^x g$

Application 11.

- $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt =_{x\to+\infty} o(x^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.
- $\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\ln(t)dt =_{x\to 1^+} o(\mathrm{e}^{1-x}) = o(x-1)$.

Proposition 12. [Méthode de Laplace] [Rou99, p322]
Soient $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{e}^{-t_0\varphi} f$ soit intégrable pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et $f(a) \neq 0$, et que $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$. Alors :

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-t\varphi(x)} f(x)dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{\mathrm{e}^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$$

APPLICATION 13.
- **[FORMULE DE STIRLING]** $\Gamma(t+1) \sim_{t\to+\infty} \sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{\mathrm{e}}\right)^t$
- Pour $\alpha > 0$, $\int_{\mathbb{R}_+} x^{-\alpha x} t^x dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}\,\alpha}} t^{1/(2\alpha)} \exp\left(\frac{\alpha t^{1/\alpha}}{\mathrm{e}}\right)$.

II. Produit de convolution [BP15, Ch14, p291–314] [QZ13, ChIX.III, p318]

On se place sur $E = \mathbb{R}^d$ où d est un entier quelconque. Soit $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué.

DÉFINITION 14. [CONVOLUTION]
On appelle convolution de f et g la fonction $f \star g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$, lorsque celle-ci est bien définie.

THÉORÈME 15.
(i) *Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $f \star g$ existe μ-p.p. et $\|f \star g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.*
(ii) *Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $f \star g$ existe pour tout x et $\|f \star g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$.*
De plus, si $1 < p, q < +\infty$, alors $\lim_{|x|\to+\infty} f \star g(x) = 0$.

PROPOSITION 16. *La convolution est commutative, associative et bilinéaire sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit, $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \star)$ est une algèbre de BANACH. Elle est cependant sans unité.*

APPLICATION 17. La somme de deux variables aléatoires indépendantes définies sur $\mathbb{R}^d$ et de densités respectives f, g par rapport à la mesure de LEBESGUE a pour densité $f \star g$.

EXEMPLE 18. Si $G_\sigma : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, alors $G_\sigma \star G_{\sigma'} = G_{\sigma+\sigma'}$

PROPOSITION 19. *Si $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\forall |\alpha| \le k, \partial^\alpha(f \star g) = (\partial^\alpha f) \star g$$

DÉFINITION 20. [APPROXIMATION DE L'UNITÉ ET SUITE RÉGULARISANTE]
Une suite $(\alpha_n)_{n\ge1}$ de fonctions positives de L^1 est une approximation de l'unité si :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1$,
- pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{x \ge \varepsilon\}} \alpha_n d\lambda_d = 0$.

Si de plus les $(\alpha_n)_{n\ge1}$ sont de classe $\mathcal{C}_c^\infty$, alors on dit que c'est une suite régularisante.

EXEMPLE 21. [EXISTENCE D'UNE SUITE RÉGULARISANTE]
On considère $\phi : x \longmapsto \exp(\frac{1}{\|x\|^2-1})\mathbb{1}_{]0,1]}(\|x\|)$ puis $\alpha : x \longmapsto \frac{\phi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \phi d\lambda_d}$.
Alors la suite $\alpha_n : x \longmapsto n^d \alpha(nx)$ est une suite régularisante.

PROPOSITION 22. *Soient $p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors $f * \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$.*

APPLICATION 23. [CONSTRUCTION DE FONCTIONS PLATEAUX]
Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert contenant K. Alors il existe $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ et $0 \le \theta \le 1$.

THÉORÈME 24. *$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p pour $1 \le p < +\infty$.*

APPLICATION 25. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, $f \star g$ est uniformément continue.

III. Transformée de FOURIER [BP15, Ch15, p315] [Rud98, Ch9, p219]

DÉFINITION 26. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de FOURIER par :

$$\mathcal{F}(f) : \zeta \longmapsto \hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\langle x|\zeta\rangle dx}$$

DÉFINITION 27. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{f}$ l'application $x \longmapsto f(-x)$.

PROPOSITION 28. *$\mathcal{F}$ est linéaire et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est uniformément continue et bornée.*

THÉORÈME 29. [LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE]
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

PROPOSITION 30. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.*
(i) $\hat{\check{f}} = \overline{\hat{f}} = \check{\hat{f}}$,
(ii) $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$,
(iii) *Si τ_h est l'opérateur de translation par $h \in \mathbb{R}^d$ alors $\mathcal{F}(\tau_h f)(\zeta) = \mathrm{e}^{-i\langle h|\zeta\rangle}\mathcal{F}(f)(\zeta)$.*
(iv) *Pour $\lambda > 0$, $\mathcal{F}(f(./\lambda)) = \lambda\hat{f}(\lambda.)$*

APPLICATION 31. La transformée de FOURIER d'une gaussienne est une gaussienne. On a $\hat{G}_\sigma : \zeta \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\zeta^2}{2}}$.

PROPOSITION 32. *$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est injective et continue.*

APPLICATION 33. En probabilité, la fonction caractéristique caractérise la loi d'une variable aléatoire.

DÉFINITION 34. [CLASSE DE SCHWARTZ]
On définit la classe de SCHWARTZ sur $\mathbb{R}^d$, notée $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, N_p(f) = \sup_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\beta \partial^\alpha f(x)\right| < +\infty$$

On munit cet espace de la famille dénombrable de semi-normes $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il est donc métrisable (espace de FRÉCHET).

EXEMPLE 35. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $G_\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

PROPOSITION 36. *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

PROPOSITION 37. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet et s'injecte continument dans les $L^p(\mathbb{R}^d)$, dans lesquels il est dense pour $p < +\infty$.*

PROPOSITION 38. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation, multiplication interne, multiplication par un polynôme (ces opérations étant continues).*

PROPOSITION 39. *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\zeta) = i^{|\alpha|}\zeta^\alpha \mathcal{F}(f)(\zeta) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(.^\beta f)(\zeta) = i^{|\beta|}\partial^\beta \mathcal{F}(f)(\zeta)$$

COROLLAIRE 40. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{\hat{f}}(-x) \quad p.p.$$

En particulier f est égale p.p. à une fonction $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

EXEMPLE 41. On a $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-|x|}) : \zeta \longmapsto \frac{2}{1+\zeta^2}$. On en déduit que $\mathcal{F}(\frac{1}{1+x^2}) : \zeta \longmapsto \pi\,\mathrm{e}^{-|\zeta|}$.

COROLLAIRE 42. [INVERSION DE FOURIER DANS $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$]
$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un automorphisme continu et on a $\mathcal{F}^{-1} : f \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(\check{f})$.

APPLICATION 43. [RÉSOLUTION D'EDP] [Bon01, §9.6, p184]

- On considère l'équation de la chaleur $\partial_t u = \partial_x^2 u$ avec condition initiale $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ telle que $u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ uniformément en t sur tout compact et $u(t,.) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ dans L^1. Cette solution est donnée par :

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy = f\star k_t(x) \quad \text{où } k_t = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\mathrm{e}^{-\frac{|.|^2}{4t}}$$

- On considère l'équation de SCHRÖDINGER $\partial_t u = i\partial_x^2 u$ avec condition initiale $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cette équation possède une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ telle que pour tout t, $u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément en t sur tout compact. On a :

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\zeta)\,\mathrm{e}^{-i\zeta^2 t}\,\mathrm{e}^{ix\zeta}\,d\zeta$$

PROPOSITION 44. *Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(x)g(x)dx$$

THÉORÈME 45. [THÉORÈME DE FOURIER-PLANCHEREL]
$\mathcal{F}$ se prolonge en un unique opérateur linéaire (toujours noté $\mathcal{F}$) de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même vérifiant :

- $\mathcal{F}\circ\mathcal{F} = (2\pi)^d\check{\mathrm{Id}}$,
- *Pour $f \in L^2(\mathbb{R})^d$, $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d}\left\|\hat{f}\right\|_{L^2}^2$,*
- *Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)dx$.*

REMARQUE 46. La définition de $\mathcal{F}$ ci-dessus coïncide avec celle sur L^1, il n'y a donc pas d'ambiguïté.

EXEMPLE 47. On calcule $\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}} : \zeta \longmapsto 2\,\mathrm{sinc}(\zeta)$. Les deux fonctions étant $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que $\widehat{\mathrm{sinc}} = \pi\mathbb{1}_{[-1,1]}$.

SPEECH

Les intégrales à paramètres sont l'analogue des séries de fonctions si on voit l'intégrale comme une généralisation de la somme. On voudrait donc voir les propriétés de la régularité de ces intégrales, c'est l'objet de la première partie. Notons également des propriétés de comportement asymptotique (méthode de LAPLACE).
Le cas particulier du produit de convolution qui est une intégrale à paramètres : bonne structure cependant sans unité, mais on peut essayer d'approcher ces unités via une approximation de l'unité. On peut alors par exemple construire des fonctions plateaux et avoir des résultats de densité.
Ensuite les transformées de FOURIER, qui sont l'analogue continu des séries de FOURIER. On a envie d'étendre la transformée de FOURIER via l'espace de SCHWARTZ qui est un espace dans lequel tout se passe bien. Cela permet notamment d'obtenir le théorème d'inversion de FOURIER et d'étendre la transformée de FOURIER à de nouvelles fonctions. Cela offre de nombreuses applications en ÉDP : l'esprit des méthodes de résolution est de passer en FOURIER pour obtenir des ÉDO, plus simples, puis repasser en temporel.
Notons aussi des applications en probabilités via la fonction caractéristique qui va caractériser la loi d'une variable aléatoire.

QUESTIONS

Q Quelle est l'idée derrière la méthode de LAPLACE ?

R On cherche l'endroit « qui va le plus compter dans l'intégrale », c'est-à-dire l'endroit où l'exponentielle est la plus importante. Voir l'explication heuristique du [Rou99].

Q Et pour la phase stationnaire ?

R En un point stationnaire, la fonction φ est à peu près constante, on perd en quelque sorte le caractère oscillant autour de ce point. C'est donc cette partie de l'intégrale qui va compter, alors que le reste va plus ou moins s'annuler par oscillations.

Q Soit $F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$. Trouver son domaine de définition, montrer que la fonction est continue. Donner le comportement de F en 0.

R Soit $f : (t,x) \longmapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$. $f(.,x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$ est mesurable, $f(t,x) \sim \frac{1}{t^x}$ en 0 donc est intégrable si et seulement si $x < 1$, puis $f(t,x) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$ en $+\infty$ est intégrable si et seulement si $x+1>1$. Ainsi F est définie sur $]0,1[$.
Comportement en 0 : si jamais on avait du $t^{1/x}$ on aurait pour $t<1$, $t^{1/x} \longrightarrow 0$ et si $t>1$, $t^{1/x} \longrightarrow +\infty$.
Pour s'y ramener, procédons au changement de variables $u = t^x$, qui donne $du = \frac{x}{t}\exp(\mathrm{e}\ln(t))dt = \frac{x}{t}udt$, ou encore $du/u = xdt/t$, et finalement $dt = x\ln t = u^{1/x}$. Ainsi :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{xu^2(1+u^{1/x})}du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})}du$$

Pour $u<1$, $\frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})} \longrightarrow 0$. Pour $u>1$, $\frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})} \longrightarrow 1/u^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Bon01] J.-M. BONY : *Théorie des distributions et analyse de* FOURIER. Les éditions de l'École Polytechnique, 2001.

[BP15] M. BRIANE et G. PAGÈS : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.

[Rud98] W. RUDIN : *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2ème édition, 1998.