236 ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES MÉTHODES DE CALCUL D'INTÉGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLES.

I. Méthodes de calcul directes

I. A. Calculs de primitives

[Gou09, §2.3, p70] [Gou09, §3.2, p132]

THÉORÈME 1. *Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors on a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.*

EXEMPLE 2. Pour $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha+1}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$.

THÉORÈME 3. [DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES]
Soit $f \in \mathbb{K}(X)$ non nulle ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), écrivons $f = N/D$ avec $N, D \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et D unitaire. Ecrivons $D = \prod_{i=1}^n D_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles. Alors f s'écrit de manière unique sous la forme $f = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{D_i^j}$ avec $E \in \mathbb{K}[X]$, $A_{i,\,j} \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(A_{i,\,j}) < \deg(D_i)$.

APPLICATION 4. Pour calculer une intégrale d'une fraction rationnelle réelle, on la décompose en éléments simples. Il suffit alors de connaître les intégrales :

- de $x \longmapsto \frac{1}{(x-a)^h}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{N}^*$. On calcule facilement une primitive :

$$x \longmapsto \frac{1}{(1-h)(x-a)^{h-1}} \quad \text{si } h \neq 1 \qquad x \longmapsto \ln(|x-a|) \quad \text{si } h = 1$$

- de $x \longmapsto \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h}$ pour $c^2 - 4d < 0$ et $h \in \mathbb{N}^*$. Ecrivons $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h} = \frac{2\alpha(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^h} + \frac{\beta}{[(x-p)^2+q^2]^h}$. On calcule facilement la première primitive, et on procède par récurrence sur h pour la seconde.

EXEMPLE 5. En décomposant en éléments simples $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$, on obtient que $x \longmapsto \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$.

I. B. Intégration par parties

[Gou08, §3.1, p123]

THÉORÈME 6. [INTÉGRATION PAR PARTIES]
Soient $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

APPLICATION 7. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est semi-convergente.

EXEMPLE 8. [INTÉGRALES DE WALLIS]
Posons $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

EXEMPLE 9. Soit $\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$. On en déduit $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I. C. Changement de variables

[Gou08, §3.1, p123] [BP15, §12.2, p255]

THÉORÈME 10. [CHANGEMENT DE VARIABLES EN DIMENSION 1]
Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée ne s'annule pas de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\varphi([a,b]) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

APPLICATION 11. [RÈGLE DE BIOCHE]
On cherche à calculer une primitive de fraction rationnelle en $\cos(x), \sin(x)$. Notons-là $R(\cos(x), \sin(x))$.

- Si $R(\cos(x), \sin(x))dx$ est inchangé par $x \longmapsto \pi - x$, on pose $t = \sin(x)$,
- Si $R(\cos(x), \sin(x))dx$ est inchangé par $x \longmapsto -x$, on pose $t = \cos(x)$,
- Si $R(\cos(x), \sin(x))dx$ est inchangé par $x \longmapsto \pi + x$, on pose $t = \tan(x)$,
- Sinon, on peut toujours essayer $t = \tan(x/2)$

EXEMPLE 12. $\int_0^\pi \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)} = \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \pi - 2$ via le changement de variables $t = \cos(x)$.

THÉORÈME 13. [CHANGEMENT DE VARIABLES EN DIMENSION QUELCONQUE]
Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et ϕ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. Alors pour toute fonction borélienne $f : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_V f(v)dv = \int_U f(\phi(u))\,|J_\phi(u)|\,du \quad \text{où} \quad J_\phi(u) = \det(d\,\phi_u)$$

De plus, toute fonction g mesurable et définie sur $\varphi(U)$ est intégrable si et seulement si $(g \circ \varphi)\,|J_\varphi|$ est intégrable sur U et dans ce cas la formule précédente reste vraie pour g.

APPLICATION 14. [PASSAGE EN COORDONNÉES POLAIRES]
Pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne, on a $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta$.

EXEMPLE 15. $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

I. D. Théorèmes de FUBINI [BP15, §11.3, p235–241]

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(F, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés. On suppose que μ et ν sont σ-finies.

THÉORÈME 16. [THÉORÈME DE FUBINI-TONELLI]
Soit $f : (E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable positive. Alors $x \longmapsto \int_F f(x,y) d\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_E f(x,y) d\mu(x)$ sont mesurables et on a :

$$\int_{E\times F} f(x,y) d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E \int_F f(x,y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_F \int_E f(x,y) d\mu(x) d\nu(y) \quad \in [0, +\infty]$$

EXEMPLE 17. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leq 1\}$. Alors $\int_D xy dxdy = \frac{1}{24}$.

THÉORÈME 18. [THÉORÈME DE FUBINI-LEBESGUE]
Soit $f : (E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu) \longrightarrow \mathbb{K}$ intégrable. Alors
- *$x \longmapsto \int_F f(x,y) d\nu(y)$ est définie μ- p.p. et est intégrable sur E,*
- *$y \longmapsto \int_E f(x,y) d\mu(x)$ est définie ν- p.p. et est intégrable sur F,*
- *$\int_{E\times F} f(x,y) d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E \int_F f(x,y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_F \int_E f(x,y) d\mu(x) d\nu(y)$*

EXEMPLE 19. Considérons $\begin{array}{rccc} f : & [0,+\infty[\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 2\,\mathrm{e}^{-2xy} - \mathrm{e}^{xy} \end{array}$.
Elle est continue mais $\int_0^1 \int_0^\infty f(x,y) dxdy = 0 < \int_0^\infty \int_0^1 f(x,y) dydx$.

APPLICATION 20. Calcul du volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$:

$$V_n = \mathrm{Leb}_n(\overline{\mathbb{B}}(0,1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

II. Techniques indirectes

II. A. Paramétrisation, interversions somme-intégrale [BP15, Ch7/8, p115–157]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

THÉORÈME 21. [CONVERGENCE DOMINÉE]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telles que :
- *$\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe μ- p.p.,*
- *il existe g intégrable sur E telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ- p.p.pour tout $n \geq 0$.*

Alors f est intégrable et $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$ (et donc $\int_E f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu$).

EXEMPLE 22. L'hypothèse de domination est cruciale : considérer $f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

APPLICATION 23. Pour $x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1 - t/n)^n t^{x-1} = \lim \frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

APPLICATION 24. Lorsque l'on peut écrire f comme série de fonctions, on peut souvent appliquer le théorème de convergence dominée.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

THÉORÈME 25. [DÉRIVATION SOUS LE SIGNE INTÉGRALE]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :
- *pour tout $u \in I$, $x \longmapsto f(u,x)$ est intégrable sur E,*
- *pour μ-presque tout x, $u \longmapsto f(u,x)$ est dérivable sur I,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $u \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors $F : u \longmapsto \int_E f(u,x) d\mu(x)$ est définie, dérivable sur I et $F' : u \longmapsto \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u,x) d\mu(x)$.

APPLICATION 26. La transformée de FOURIER d'une gaussienne est une gaussienne. Si $G_\sigma : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ pour un $\sigma > 0$, alors $\hat{G}_\sigma : \zeta \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\zeta^2}{2}}$.

APPLICATION 27. Prenant $f : (t,x) \longmapsto \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{e}^{-tx}$, on montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

II. B. Analyse complexe [Tau06, §15.2.5, p192]

THÉORÈME 28. [THÉORÈME DES RÉSIDUS]
Soit U un ouvert convexe ou étoilé (ou simplement convexe). Soit f méromorphe sur U. On note P l'ensemble de pôles de f. Alors pour $\gamma : [0,1] \longrightarrow U \setminus P$ chemin fermé, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{a\in P} \mathrm{Res}(f,a)\ \mathrm{Ind}(\gamma,a)$$

APPLICATION 29. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-x^2)\cos(\alpha x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-\alpha^2/4)$.

APPLICATION 30. On retrouve $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$ ou $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

EXEMPLE 31. Soit $-1 < \alpha < 1$. Alors $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln(x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\pi}{2}\alpha)}$.

III. Méthodes d'approximation numérique

III. A. Méthodes de quadrature

[Dem96, ChIII, p59]

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche des formules pour approcher $I(f) = \int_a^b f(t)dt$. Fixons $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$.

DÉFINITION 32. [MÉTHODE DE QUADRATURE]
Une méthode de quadrature consiste, pour $0 \leq i \leq n-1$ à approcher $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f$ par $A_i(f) = h_i \sum_{j=0}^{\ell_j} \omega_{i\,j} f(\zeta_{i\,j})$ où les $(\zeta_{i\,j})_j$ sont dans $[x_i, x_{i+1}]$ et les $(\omega_{i\,j})_{0 \leq j \leq n}$ sont des réels fixés tels que $\sum_j \omega_{i\,j} = 1$.
On note alors $E(f) = I(f) - \sum_{i=0}^{n-1} A_i(f)$ l'erreur de la méthode.

DÉFINITION 33. [MÉTHODE DE QUADRATURE]
On dit qu'une méthode de quadrature est d'ordre N si elle est exacte ($E(f) = 0$) pour tout $f \in \mathbb{R}_N[X]$ et s'il existe $f \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$ telle qu'elle soit inexacte.

DÉFINITION 34. [MÉTHODE PAR INTERPOLATION DE LAGRANGE]
Fixons i et $(\zeta_j)_j$. La méthode d'interpolation de LAGRANGE associée consiste à prendre $\omega_j = \frac{1}{h_i} \int_{[x_i, x_{i+1}]} \ell_j$ où $\ell_j = \prod_{k \neq j} \frac{X - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k}$.

APPLICATION 35. Comme $\sum_j \ell_j = 1$, on utilise souvent comme fonction de poids les $(\ell_j)_j$ associés à une subdivision de $[x_i, x_{i+1}]$: ce sont les méthodes par interpolation de LAGRANGE.
(i) **[MÉTHODE DES RECTANGLES]**
On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{n-1} h_i f(z_i)$ où $(z_i)_i = (x_i)_i$ ou $(x_{i+1})_i$. Méthode d'ordre 0.
(ii) **[MÉTHODE DES POINTS MILIEUX]**
De même avec $(z_i)_i = (\frac{x_{i+1} - x_i}{2})_i$. Méthode d'ordre 1 et $E(f) \leq \frac{1}{3} \|f''\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^2$.
(iii) **[MÉTHODE DES TRAPÈZES]**
On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{n-1} h_i \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}$. Méthode d'ordre 1 et $E(f) \leq \frac{2}{3} \|f''\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^2$.
(iv) **[MÉTHODE DE SIMPSON]**
On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{n-1} h_i \frac{f(x_{i+1}) + 4f(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}) + f(x_i)}{6}$. Méthode d'ordre 3 et $E(f) = O(\|f^{(4)}\|_\infty)$ si f est $\mathcal{C}^4$.

EXEMPLE 36. Approximation de $\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \frac{\pi}{4}$:
(i) méthode des rectangles (à gauche ou à droite) : π,
(ii) méthode des points milieux : 0,
(iii) méthode des trapèzes : π,
(iv) méthode de SIMPSON : $\frac{\pi}{3}$.

III. B. Méthode de MONTE-CARLO

[BL07, §V.5, p132] et [Mé11, §5.3/6.5, p147/178]

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

THÉORÈME 37. [LOI DES GRANDS NOMBRES]
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires i.i.d. intégrables. Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_1] \quad \text{p.s.}$$

APPLICATION 38. [MÉTHODE DE MONTE-CARLO]
Soit $f : [0,1]^d \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de LEBESGUE. Soit $(X_i)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1]^d)$. Alors

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} I = \int_{[0,1]^d} f(x)dx \text{ p.s.}$$

THÉORÈME 39. [THÉORÈME CENTRAL LIMITE]
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de carré intégrable. Alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_1]) \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} Z \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$$

APPLICATION 40. Supposons f telle que $\mathrm{Var}(f) = \int_{[0,1]^d} f(x)^2 dx - \left(\int_{[0,1]^d} f(x)dx\right)^2$ soit majorée par M. Alors $IC_\alpha^\infty = \left[I_n \pm q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{M}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour $I(f)$, où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile de niveau $1 - \alpha/2$ de $\mathcal{N}(0,1)$.

ANNEXE

Contours utilisés en analyse complexe.
Illustration des différentes méthodes numériques.

SPEECH

Calculer la valeur d'une intégrale est une question fréquente pour laquelle nous n'avons pas de procédure automatique donnant la solution : on a donc besoin de nombreux outils de calculs.
Dans la première partie, on regarde ce qu'il se passe en dimension 1.
En dimension supérieure, on doit parfois se ramener en dimension 1, ou encore utiliser le théorème de changement de variables multidimensionnel, par exemple pour passer en coordonnées polaires.
Ensuite on donne des résultats issus de la théorie de l'intégration, qui permettent par exemple dans le cas d'intégrales à paramètres ou d'intégrales d'une série de fonctions d'obtenir des résultats sur les intégrales aux limites.
Enfin, d'autres méthodes comme l'analyse complexe et la transformée de FOURIER permettent d'étoffer les outils à notre disposition.

QUESTIONS

Q Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+\mathrm{e}^x} dx$.

R C'est l'intégrale d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable en $+\infty$ car $o(1/x^2)$. On a $\frac{1}{1+t} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n$ pour $t \in]-1,1[$, donc :

$$\frac{x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{x}{\mathrm{e}^x}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x}{\mathrm{e}^x}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\,\mathrm{e}^{-nx}$$

On a $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}\,dx = \frac{1}{(n+1)^2}$, donc on peut appliquer le théorème de FUBINI-LEBESGUE :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}dx = \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}$$

et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{\pi^2}{24}$$
$$= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2p)^2} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

Q Quel avantage/inconvénient voyez vous à la méthode de MONTE-CARLO ?

R Avantage : valable même pour f très irrégulière, et temps de calcul linéaire en la dimension.
Inconvénient : approximation aléatoire, donc pas de contrôle déterministe de l'erreur.

BIBLIOGRAPHIE

[BL07] P. BARBE et M. LEDOUX : *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[BP15] M. BRIANE et G. PAGÈS : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[Dem96] J.-P. DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences, 1996.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Gou09] X. GOURDON : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Mé11] S. MÉLÉARD : *Aléatoire : introduction à la théorie et au calcul des probabilités*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2011.

[Tau06] P. TAUVEL : *Analyse complexe pour la Licence 3*. Dunod, 2006.