235 PROBLÈMES D'INTERVERSION DE LIMITES ET D'INTÉGRALES.

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions et f une fonction, toutes définies sur un même ensemble E et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. [Convergences simple, uniforme]
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si pour tout $x \in E$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si $\sup_E |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

I. Suites et séries de fonctions : propriétés de la limite et de la somme

I. A. Interversion limite-limite [AF91, El 11]

Exemple 2. [Hau07, p235] Pour $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n$, on a $\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1^-} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Théorème 3. *Supposons E métrique. Soit $a \in \overline{E}$ tel que $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$ et $f_n \overset{u}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f$ sur un voisinage de a.*
Alors $\lim_{n\to+\infty} \ell_n$ et $\lim_{x\to a} f(x)$ existent et sont égales. Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Théorème 4. *Dans le même contexte, si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues en a et si $f_n \overset{u}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f$ sur un voisinage de a, alors f est continue en a.*

Corollaire 5. [Séries de fonctions]
Supposons E métrique et soit $a \in \overline{E}$. Si $\lim_{x\to a} f_n(x)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum f_k$ converge uniformément au voisinage de a, alors :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Remarque 6. Dans les deux théorèmes on aurait pu plus généralement considérer les fonctions à valeurs dans un espace complet. Dans le corollaire on aurait pu les supposer à valeurs dans un espace de Banach.

Exemple 7. $\zeta : x > 1 \longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ est continue et $\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Application 8. Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur $\mathbb{D}_R(O)$.

Remarque 9. On ne peut rien dire sur le cercle de convergence : par exemple avec $\sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ définie pour $|z| < 1$, on a $\frac{1}{1+z} \underset{z\to 1}{\longrightarrow} 1/2$ mais $\sum (-1)^n$ diverge.

Proposition 10. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que $f_n' \overset{u}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} g$ et $f_n \overset{s}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f$.*
Alors $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, $f_n \overset{u}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f$ et $f' = g$.

Remarque 11. La preuve de ce théorème utilise le Théorème 16.

Corollaire 12. *Si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $\mathcal{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ et telles que $f_n^{(p)} \overset{s}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} g_p$ pour $p \leq k$ avec $f_n^{(k)} \overset{u}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} g_k$, alors $g_0 \in \mathcal{C}^k([a,b],\mathbb{R})$, $f_n \overset{u}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} g_0$ et $g_0^{(p)} = g_p$ pour $p \leq k$.*

Exemple 13. Soit $f_u : t \longmapsto \exp(tu)$ $(u \in \mathbb{R})$. Alors f_u est $\mathcal{C}^\infty$ et $f_u^{(p)} : t \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^{n-p}}{(n-p)!} u^n$.

Exemple 14. [Hau07, p241] Importance de la convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$: considérer $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

I. B. Interversion limite-intégrale sur un segment [Gou08, §4.3, p222–223]

Exemple 15. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(0) = 0$, $f_n(1/n) = n^2$, $f_n([2/n,1]) = 0$ et f_n est affine sur $[0,1/n]$ puis $[1/n,2/n]$.
Alors f_n est continue, converge simplement vers 0 mais $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n = +\infty \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n$.

Théorème 16. *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, continues et convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f. Alors f est continue et :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

Exemple 17. $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n(1-x)^n$.
On a $\sup_{[0,1]} f_n = 1/4^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\int_0^1 f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 18. Importance de l'hypothèse de compacité : considérer f_n définie par $f_n(0) = 0$, $f_n(n) = 1/\sqrt{n}$, $f_n([2n, +\infty[) = 0$ et f_n affine sur $[0, n]$ et $[n, 2n]$.
Alors $\sup_{\mathbb{R}^+} |f_n| = 1/\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\int_0^\infty f_n = \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Corollaire 19. [Séries de fonctions]
Dans le même contexte, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum f_k$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} f_n(t)dt = \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(t)dt$$

Application 20. Si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors pour $[a, b] \subset]-R, R[$, on a $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n\geq 0} a_n \int_a^b x^n dx$.

Exemple 21. Pour $x \in]-1, 1[$, on a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$, d'où $\arctan(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

II. Théorèmes d'interversion en théorie de l'intégration

Dans toute la suite $(E, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

II. A. Les théorèmes fondamentaux [BP15, Ch7/8, p115–157]

Théorème 22. [Convergence monotone]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante μ- p.p. de fonctions mesurables positives μ- p.p.. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \uparrow \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} \uparrow f_n d\mu \quad (\in [0, +\infty])$$

Exemple 23. Le résultat est faux pour des fonctions décroissantes : $f_n = 1/n$ ou $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$.

Corollaire 24. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions mesurables positives μ- p.p.. Alors :*

$$\sum_{n\geq 0} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} \sum_{n\geq 0} f_n d\mu \quad (\in [0, +\infty])$$

Théorème 25. [Lemme de Fatou]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives μ- p.p..

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \leq +\infty$$

Application 26. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions positives p.p. telles que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ p.p., alors $\int_E f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Théorème 27. [Convergence dominée]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telles que :
- $\lim_{n\to+\infty} f_n$ *existe μ- p.p.,*
- *il existe g intégrable sur E telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ- p.p.pour tout $n \geq 0$.*

Alors f est intégrable et $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$ (et donc $\int_E f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu$).

Exemple 28. L'hypothèse de domination est cruciale : considérer $f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

Corollaire 29. *Si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mesurables et telles que $\sum_{n\geq 0} \int_E |f_n|\, d\mu < +\infty$, alors les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum_{n\geq 0} f_n$ sont intégrables et on a :*

$$\int_E \sum_{n\geq 0} f_n d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_E f_n d\mu$$

Application 30. $\int_0^n (1 + x/n)^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ 1/(\alpha - 1) & \text{sinon} \end{cases}$.

Théorème 31. [Équation de la chaleur périodique]
Soit $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle, 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue. Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_{xx}^2 u(t, x) & \forall t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

II. B. Conséquences sur les intégrales à paramètres [BP15, §8.3, p140–147]

Théorème 32. [Continuité sous le signe intégrale]
Soient U un espace métrique, $u_0 \in U$ et $f : U \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :
- *pour tout $u \in U$, $x \longmapsto f(u,x)$ est mesurable,*
- *pour μ-presque tout x, $u \longmapsto f(u,x)$ est continue en u_0,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $u \in U$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors $u \longmapsto \int_E f(u,x)d\mu(x)$ est bien définie sur U et est continue en u_0.

Application 33. Continuité de la transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 34. [Dérivation sous le signe intégrale]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :
- *pour tout $u \in I$, $x \longmapsto f(u,x)$ est intégrable sur E,*
- *pour μ-presque tout x, $u \longmapsto f(u,x)$ est dérivable sur I,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $u \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors $F : u \longmapsto \int_E f(u,x)d\mu(x)$ est définie, dérivable sur I et $F' : u \longmapsto \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)d\mu(x)$.

Application 35. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Application 36. La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne. Si $G_\sigma : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ pour un $\sigma > 0$, alors $\hat{G}_\sigma : \zeta \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\zeta^2}{2}}$.

Proposition 37. [Formule sommatoire de Poisson] *[Gou08, §6.4, p273]*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ en $\pm\infty$. Alors les sommes suivantes sont bien définies et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, \mathrm{e}^{inx}$$

où $\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt$.

Application 38. [Équation fonctionnelle de la fonction de Jacobi]
Pour $x > 0$, $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ vérifie $\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta(\frac{1}{x})$.

Théorème 39. [Holomorphie sous le signe intégrale]
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que :
- *pour tout $z \in \Omega$, $x \longmapsto f(z,x)$ est mesurable sur E,*
- *pour μ-presque tout x, $u \longmapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Ω,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $z \in \Omega$, $|f(z,x)| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors $F : z \longmapsto \int_E f(z,x)d\mu(x)$ est holomorphe sur Ω et

$$\forall k \geq 0, F^{(k)} : z \longmapsto \int_E \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z,x)d\mu(x)$$

Exemple 40. La fonction $\Gamma : z \longmapsto \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1} dt$ est définie et holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$.

II. C. Interversion intégrale-intégrale [BP15, §11.3, p235–241]

Soit $(F, \mathcal{B}, \nu)$ un autre espace mesuré. On suppose que μ et ν sont σ-finies.

Théorème 41. [Théorème de Fubini-Tonelli]
Soit $f : (E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable positive. Alors $x \longmapsto \int_F f(x,y)d\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_E f(x,y)d\mu(x)$ sont mesurables et on a :

$$\int_{E\times F} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E \int_F f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_F \int_E f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) \quad \in [0,+\infty]$$

Application 42. Considérons μ et ν les mesures de comptages sur $\mathbb{N}$. Alors pour tout famille de réels positifs $(u_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$, on a $\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} u_{i,j} = \sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 0} u_{i,j}$.

Théorème 43. [Théorème de Fubini-Lebesgue]
Soit $f : (E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu) \longrightarrow \mathbb{K}$ intégrable. Alors
- *$x \longmapsto \int_F f(x,y)d\nu(y)$ est défini μ- p.p. et est intégrable sur E,*
- *$y \longmapsto \int_E f(x,y)d\mu(x)$ est défini ν- p.p. et est intégrable sur F,*
- *$\int_{E\times F} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E \int_F f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_F \int_E f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$*

Exemple 44. Considérons $f : [0,+\infty[\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{-2xy} - \mathrm{e}^{xy}$.
Elle est continue mais $\int_0^1 \int_0^\infty f(x,y)dxdy = 0 < \int_0^\infty \int_0^1 f(x,y)dydx$.

Application 45. Calcul du volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$:

$$V_n = \mathrm{Leb}_n(\overline{\mathbb{B}}(0,1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

SPEECH

On s'intéresse à plusieurs situations dans lesquelles on veut intervertir limites et intégrales :

- $\lim_{n\to+\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to+\infty} f_n$,
- intégrales à paramètres $u \longmapsto \int_E f(x,u)d\mu(x)$,
- $\int_E \int_Y f = \int_Y \int_E f$.

Nous allons voir dans une première partie l'importance de la convergence uniforme, qui permet l'interversion limite limite, puis même limite intégrale dans le cas de segments.
Ensuite nous verrons comment la théorie de l'intégration apporte beaucoup de souplesse. Les outils des espaces L^p comme la convergence monotone, le lemme de Fatou ou le théorème de convergence dominée permettent des inversions faciles et ont des conséquences notables sur les intégrales à paramètres
Enfin l'inversion entre intégrales va être également possible dans le cadre de cette théorie : c'est l'objet des théorèmes de Fubini.

COMMENTAIRES

Autres références possibles : [Bre99, Far00, QZ13, Rud98].
Dans le speech, ne pas trop parler de la différence des deux théories d'intégration Riemann/Lebesgue pour éviter des questions piège.

QUESTIONS

Q Pourquoi le théorème de continuité sous le signe intégral est-il une conséquence des théorèmes précédents ?

R On se ramène à des suites car l'espace est métrique. On fait le lien entre les hypothèses qui vont permettre d'appliquer les théorèmes précédents.

Q Soit $T > 0$ et $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$, on pose $g_n(t) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u)\, \mathrm{e}^{-kn(t-u)}\, du$. Déterminer la limite simple de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q Étudier l'existence et la continuité de la fonction $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t)}{1+(x-t)^4} dt$.

Q On considère la série de fonctions $\sum f_k$ avec $f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{-nx} - 2\,\mathrm{e}^{-2nx}$ pour $x \geq 0$. Comparer l'intégrale sur $(\mathbb{R}^+)^*$ de la limite avec la limite de l'intégrale. Que peut-on dire de la convergence simple ? normale ?

BIBLIOGRAPHIE

[AF91] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse : *Cours de mathématiques, Tome 2, Analyse*. Dunod, 1991.

[BP15] M. Briane et G. Pagès : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[Bre99] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.

[El 11] M. El Amrani : *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2011.

[Far00] J. Faraut : *Calcul intégral*. Belin, 2000.

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Hau07] D. Hauchecorne : *Les contre-exemples en Mathématiques*. Ellipses, 2ème édition, 2007.

[QZ13] H. Queffélec et C. Zuily : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[Rud98] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2ème édition, 1998.