234 FONCTIONS ET ESPACES DE FONCTIONS LEBESGUE-INTÉGRABLES.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, muni de sa tribu borélienne et de la restriction à Ω de la mesure de LEBESGUE, dont on suppose la construction connue.
Soit $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

I. Construction de l'intégrale et théorèmes d'intégration
[BP15, Ch7, p115]

I. A. Intégrale de fonctions étagées

Définitions, exemple avec la mesure de DIRAC, la mesure de comptage
Résultats d'additivité, de croissance, de positive homogénéité

I. B. Intégrales de fonctions mesurables positives

Définition de l'intégrale de f à partir des fonctions étagées
Convergence uniforme d'une suite de fonctions étagées vers f (fondamental)
Convergence monotone (contre exemple dans le cas décroissant)
Transfert des propriétés des intégrales de fonctions étagées
Lemme de FATOU, exemples

I. C. Fonctions intégrables

Fonction intégrable (cas $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$), exemples, contre-exemples
Théorème de convergence dominée
Importance de l'hypothèse de domination
Théorème de continuité sous le signe intégral, application à la transformée de FOURIER

II. Espaces L^p
[BP15, Ch9, p157–194] [Bre99, ChIV, p54]

II. A. Définition

DÉFINITION 1. [APPLICATION $\|.\|_p$, ESPACE $\mathcal{L}^p$]
Pour $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable, on définit $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ lorsque p est fini, et $\|f\|_\infty = \inf \{M > 0 \mid |f| \leq M \ \mu\text{-p.p.}\}$. On définit l'espace vectoriel :

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty\}$$

THÉORÈME 2. [INÉGALITÉ DE HÖLDER]
Pour toutes fonctions $f, g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables, on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

COROLLAIRE 3. [INÉGALITÉ DE MINKOWSKI]
Pour toutes fonctions $f, g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables, on a $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

On vérifie que deux fonctions f, g mesurables égales μ-p.p. vérifient $\|f\|_p = \|g\|_p$. Ainsi :

DÉFINITION 4. [ESPACE L^p]
On note $L^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)/\{\|.\|_p = 0\}$ (ou $L^p(E)$, ou L^p) l'ensemble des fonctions de $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.. L'application $\|.\|_p$ passe au quotient et définit ainsi une application sur $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ notée également $\|.\|_p$ par abus.

COROLLAIRE 5. *$\|.\|_p$ est une norme et l'espace $(L^p(E), \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

EXEMPLE 6. [ESPACE ℓ^p]
Cas où $E = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage.
Si p est fini, on note ℓ^p l'espace $\mathcal{L}^p = L^p = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty\}$.
$\ell^\infty = \mathcal{L}^\infty = L^\infty$ est l'espace des suites bornées.

APPLICATION 7. [INCLUSION ENTRE ESPACES L^p] Soient $p, p' \in [1, +\infty]$.
- lorsque $\mu(E) < +\infty$, on a $p < p' \Longrightarrow L^{p'} \subset L^p$,
- contre-exemple dans le cas où $\mu(E) = +\infty$: $f : x \longrightarrow (1+x)^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \in L^2 \setminus L^1$.
- on a $p' < p \Longrightarrow \ell^{p'} \subset \ell^p$.

II. B. Premières propriétés des espaces L^p

THÉORÈME 8. [CONVERGENCE DOMINÉE DANS LES L^p]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de L^p convergeant μ-p.p. vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction $g \in \mathbb{L}^p$ telle que $|f_n| \leq g\mu$-p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $f \in L^p$ et on a $\|f_n - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

THÉORÈME 9. [THÉORÈME DE RIESZ-FICHER]
L'espace $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|.\|_p)$ est un espace de BANACH.

COROLLAIRE 10. *Toute suite convergente dans L^p admet une sous-suite qui converge μ-p.p..*

EXEMPLE 11. Contre-exemple de non-convergence de la suite μ-p.p.. : les bosses roulantes.

THÉORÈME 12. *Lorsque $p < \infty$:*
(i) l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans L^p,
(ii) l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p.

APPLICATION 13. Uniforme continuité de l'opérateur par translation : pour tout $f \in L^p$, $a \longmapsto \tau_a f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE 14. *L^p est séparable lorsque $p < +\infty$.*

III. Convolution et régularisation [BP15, Ch14, p291–314]

III. A. Convolution

On se place sur $E = \mathbb{R}^d$ où d est un entier quelconque. Soit $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué.

DÉFINITION 15. [CONVOLUTION]
On appelle convolution de f et g la fonction $f \star g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$, lorsque celle-ci est bien définie.

THÉORÈME 16.
(i) Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $f \star g$ existe μ-p.p. et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
(ii) Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $f \star g$ existe pour tout x et $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
De plus, si $1 < p, q < +\infty$, alors $\lim_{|x| \to +\infty} f \star g(x) = 0$.

PROPOSITION 17. *La convolution est commutative, associative et bilinéaire sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit, $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \star)$ est une algèbre de BANACH. Elle est cependant sans unité.*

APPLICATION 18. La somme de deux variables aléatoires indépendantes définies sur $\mathbb{R}^d$ et de densités respectives f, g par rapport à la mesure de LEBESGUE a pour densité $f \star g$.

EXEMPLE 19. Si $G_\sigma : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, alors $G_\sigma \star G_{\sigma'} = G_{\sigma+\sigma'}$

III. B. Approximation de l'unité et régularisation par convolution

DÉFINITION 20. [APPROXIMATION DE L'UNITÉ ET SUITE RÉGULARISANTE]
Une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de fonctions positives de L^1 est une approximation de l'unité si :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1$,
- pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{x \geq \varepsilon\}} \alpha_n d\lambda_d = 0$.

Si de plus les $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ sont de classe $\mathcal{C}_c^\infty$, alors on dit que c'est une suite régularisante.

PROPOSITION 21. *Soient $p < +\infty$, $f \in L^p$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors $f * \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$.*

EXEMPLE 22. [EXISTENCE D'UNE SUITE RÉGULARISANTE]
On considère $\phi : x \longmapsto \exp(\frac{1}{\|x\|^2-1})\mathbb{1}_{]0,1]}(\|x\|)$ puis $\alpha : x \longmapsto \frac{\phi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \phi d\lambda_d}$.
Alors la suite $\alpha_n : x \longmapsto n^d \alpha(nx)$ est une suite régularisante.

PROPOSITION 23. *Si $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\forall\, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha (f \star g) = (\partial^\alpha f) \star g$$

APPLICATION 24. [CONSTRUCTION DE FONCTIONS PLATEAUX] [QZ13, ChIX.III, p318]
Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert contenant K. Alors il existe $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ et $0 \leq \theta \leq 1$.

THÉORÈME 25. *$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$.*

APPLICATION 26. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, $f \star g$ est uniformément continue.

IV. Le cas de L^2

COROLLAIRE 27. [DU THÉORÈME 9]
$L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de HILBERT pour le produit scalaire : $\langle f \mid g\rangle = \int_E f\overline{g}d\mu$.

IV. A. Application en probabilités [BL07, ChVI, p149]

PROPOSITION 28. [ESPÉRANCE CONDITIONNELLE]
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Soit de plus X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, intégrable ($X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$). Alors il existe une unique (presque sûrement) variable aléatoire Z telle que :
(i) Z est $\mathcal{B}$-mesurable,
(ii) pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_B]$.
De plus, Z est intégrable. On l'appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]$.

APPLICATION 29. Soit $\mathcal{B}$ une tribu. Soient X une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{B}$ et Y une variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable. Alors pour toute fonction ψ telle que $\psi(X,Y)$ est intégrable :

$$\mathbb{E}[\psi(X,Y)\,|\,\mathcal{B}] = \int \psi(x,Y)\,d\mu_X(x) = h(Y)$$

où $h(y) = \mathbb{E}[\psi(X,y)]$.

EXEMPLE 30. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire centrée réduite sur $\mathbb{Z}^d$. Alors $\mathbb{E}[S_{n+1}\,|\,S_n] = S_n$.

IV. B. Polynômes orthogonaux [BMP05, §3.1.5, p110] [Dem96, §II.5, p51]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 31. Soit $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, strictement positive et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$. On dit alors que ρ est une fonction de poids.

DÉFINITION 32. On définit $L^2(I,\rho) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \,|\, \int_I |f(x)|^2 \rho(x)dx < +\infty \right\}$.

PROPOSITION 33. *$L^2(I,\rho)$ est un espace de HILBERT pour le produit du scalaire $\langle f \mid g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$.*

PROPOSITION 34. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux pour $\langle . \mid . \rangle_\rho$ et tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout n.*

EXEMPLE 35. Voir les dessins en annexe :

- Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho : x \longmapsto e^{-x^2}$, les $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes de HERMITE,
- Pour $I = [-1,1]$ et $\rho : x \longmapsto 1$, les $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes de LEGENDRE.

THÉORÈME 36. [BASE HILBERTIENNE DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX]
Soit ρ une fonction de poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$, alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

APPLICATION 37. Si I est borné, on a donc nécessairement une base hilbertienne.
La famille $(P_n \exp(-.^2/2))_n$, pour $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les polynômes de HERMITE, est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

EXEMPLE 38. Sans l'hypothèse on a le contre-exemple suivant : soit la fonction de poids $w : x \longmapsto x^{-\ln(x)}$ sur $I = \mathbb{R}_+$. Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne forme pas une base de $L^2(I,w)$.

SPEECH

La théorie de LEBESGUE a permis de s'abstenir de nombreuses conditions jusqu'alors nécessaires pour définir l'intégrale d'une fonction. Si CAUCHY puis RIEMANN ont défini les intégrales de fonctions continues et d'autres classes de fonctions régulières, c'est bien LEBESGUE qui avec la notion de mesure a permis une nouvelle approche de l'intégrale, avec une intégration en tranches horizontales et non plus verticales. Cette nouvelle théorie s'étend a des espaces de fonctions extrêmement riches, qui sont des espaces de BANACH. De plus, les théorèmes d'interversion de symboles ne nécessitent que peu d'hypothèses.

QUESTIONS

Q Soit $p_0 > 1$ et $f > 0 \in L^{p_0}(\mu)$ où μ est une mesure de probabilité. On suppose que $\ln(f)$ est intégrable, d'intégrale m. Mq la suite $\|f\|_p \underset{p\to 0}{\longrightarrow} \exp(m)$. [BP15]

R

$$\ln(\|f\|_p) = \frac{1}{p}\ln(1-(1-\int |f|^p)) = -\frac{1-\int|f|^p}{p} + o(1) = -\frac{\int 1-|f|^p}{p} + o(1)$$
$$= -\int_\Omega \frac{1-\exp(p\ln(f))}{p}d\mu$$

On sépare selon si $f > 1$ ou non.

Q Montrer que $\Psi : L^q \longrightarrow (L^p)*, g \longmapsto (f \longmapsto \int fg)$ est une isométrie.

Q Montrer que $\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$ si $\|f\|_p < +\infty$ pour tout p.

BIBLIOGRAPHIE

[BL07] P. BARBE et M. LEDOUX : *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[BP15] M. BRIANE et G. PAGÈS : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[Bre99] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.

[Dem96] J.-P. DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences, 1996.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.