$\boxed{230}$ SÉRIES DE NOMBRES RÉELS OU COMPLEXES. COMPORTEMENT DES RESTES OU DES SOMMES PARTIELLES DES SÉRIES NUMÉRIQUES. EXEMPLES.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

I. Généralités sur les séries [Gou08, §4.2, p200–202/219]

DÉFINITION 1. [SÉRIE, RESTE, CONVERGENCE]

- On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
  On note $\sum u_k$ la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que $(\sum u_k)_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
  On note $R_n = \sum_{k=0}^\infty u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^\infty u_k$ le reste de la série à l'ordre n.
- On dit que $\sum u_k$ converge lorsque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, sa limite est appelée somme de la série et notée $\sum_{n=0}^\infty u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n \dots$
- Une série non convergente est dite divergente.

EXEMPLE 2. [SÉRIES ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE]

- Si $u_n = na$, la série converge si et seulement si $a = 0$.
- Si $u_n = b^n$, la série converge si et seulement si $|b| < 1$ et dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b^n = \frac{1}{1-b}$.

PROPOSITION 3. [CRITÈRE DE CAUCHY]
$\sum u_k$ converge si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall m > n \geq N, |\sum_{k=n}^m u_k| \leq \varepsilon$.

EXEMPLE 4. Étude des séries de termes généraux $\frac{1}{n\sigma(n)}$ et $\frac{\sigma(n)}{n}$ pour σ permutation de $\mathbb{N}^*$.

REMARQUE 5. $\sum u_k$ converge $\iff$ $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sum u_k$ converge $\implies$ $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

II. Séries de termes réels positifs [Gou08, §4.2, p201–206]

On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ dans cette partie.

II. A. Critères de convergence et divergence

PROPOSITION 6. *La convergence de la série $\sum u_k$ équivaut au fait que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée.*

On notera donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n < +\infty$ pour dire que $\sum u_k$ converge, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = +\infty$ sinon.

LEMME 7. *Si u_n est le terme général d'une série convergente, alors $\sum u_k + v_k$ et $\sum v_k$ ont même nature et si elles convergent, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$.*

THÉORÈME 8. [COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante continue par morceaux.
Alors la série de terme général (positif) $\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ converge.
En particulier, $\sum f(k)$ et $(\int_0^n f(t)dt)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature et on a :

- *si $\sum f(k)$ converge, alors $\int_{n+1}^\infty f(t)dt \leq \sum_{k\geq n} f(k) \leq \int_n^\infty f(t)dt$,*
- *si $\sum f(k)$ diverge, alors $\sum_{k\geq n} f(k) \sim \int_0^n f(t)dt$.*

APPLICATION 9. [SÉRIES DE BERTRAND] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

THÉORÈME 10. [COMPARAISONS DE SÉRIES]

i) Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge,
ii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_k$ et $\sum v_k$ ont même nature.

EXEMPLE 11. La série de terme général $1/n$ est divergente. En notant $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les sommes partielles associées, il existe une constante $\gamma > 0$ (appelée constante d'EULER) telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

THÉORÈME 12. [SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON]
Notons $S_n(u), R_n(u)$ (resp. $S_n(v), R_n(v)$) les sommes partielles et restes associés à u (resp. v). Alors :

	$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n < +\infty$	$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n = +\infty$
$u_n = o(v_n)$	$R_n(u) = o(R_n(v))$	$S_n(u) = o(S_n(v))$
$u_n = O(v_n)$	$R_n(u) = O(R_n(v))$	$S_n(u) = O(S_n(v))$
$u_n \sim v_n$	$R_n(u) \sim R_n(v)$	$S_n(u) \sim S_n(v)$

THÉORÈME 13. [RÈGLES DE D'ALEMBERT, DE CAUCHY ET DE RAAB-DUHAMEL]
Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs.

i) Supposons que $u_{n+1}/u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in [0, +\infty]$, alors :
- *Si $\lambda < 1$, $\sum u_k$ converge,*
- *Si $\lambda > 1$ (ou si $\lambda = 1$ et $\forall n, u_{n+1}/u_n \geq 1$), $\sum u_k$ diverge.*

ii) Supposons que $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in [0, +\infty]$, alors :
- *Si $\lambda < 1$, $\sum u_k$ converge,*
- *Si $\lambda > 1$ (ou si $\lambda = 1$ et $\forall n, \sqrt[n]{u_n} \geq 1$), $\sum u_k$ diverge.*

iii) Supposons que $u_{n+1}/u_n = \frac{1}{1+a/n+O(1/n^2)}$. Alors il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda/n^a$.

Exemple 14. Étude des séries de terme général $1/n!$ et $1/(\lambda^n+1)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

III. Séries de termes généraux quelconques [Gou08, §4.2, p206–209]

On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

III. A. Importance de l'absolue convergence

Définition 15. [Absolument convergente, semi-convergence]
- On dit que $\sum u_k$ est absolument convergente si $\sum |u_k|$ est convergente.
- On dit que $\sum u_k$ est semi-convergente si $\sum u_k$ est convergente et non absolument convergente.

Théorème 16. [Réarrangement de Riemann] *[FGN07, §3.48, p217]*
Soit $\sum u_k$ une série semi-convergente réelle. Alors pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 17. *Si $\sum u_k$ est absolument convergente, alors pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$.*

Remarque 18. On peut en fait choisir ℓ dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$!

Exemple 19. Dans le cas complexe, le théorème de réarrangement ne s'applique pas ! Considérer par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n} i$.

III. B. Étude de l'absolue convergence

Proposition 20. [Lien entre convergence et absolue convergence]
Si $\sum u_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente et on a

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Remarque 21. Lorsque $\sum u_k$ converge ou lorsque $|S_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'inégalité $\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est en fait valable dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ que la série soit absolument convergente ou non.

Corollaire 22. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente, les résultats du Théorème 10 et du Théorème 12 restent vrais (en supposant toujours $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$!).*

Exemple 23. [Moyenne de Cesàro]
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 24. Contre-exemple du point ii) du Théorème 10 dans le cas ou les deux suites ne sont pas de signe constant : on verra que les séries de termes généraux $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ n'ont pas même nature lorsque $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

III. C. Étude de la semi-convergence

Définition 25. [Série alternée]
On dit que $\sum u_k$ est alternée si $u_n u_{n+1} \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 26. [Critère des séries alternées]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge et on a pour $n\in\mathbb{N}$, $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Proposition 27. [Transformation d'Abel]
Supposons que $u_n = a_n v_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0 et v_n est le terme général d'une série bornée (c'est-à-dire $(\sum_{k=0}^n v_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée). Alors $\sum u_k$ est convergente.

Exemple 28. La série de terme général $\mathrm{e}^{in\theta}/n^\alpha$ où $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ est convergente pour $\alpha > 0$.

Proposition 29. [Produit de Cauchy]
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont absolument convergentes, alors la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ (appelée produit de Cauchy) est absolument convergente et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p \sum_{q\in\mathbb{N}} b_q$$

Exemple 30. Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

IV. Applications

IV. A. Séries entières

[Gou08, §4.4, p236]

Définition 31. [Série entière]
On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $z \longmapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 32. [Rayon de convergence]
On définit le rayon de convergence de la série entière par le réel $R = \sup(\{r \geq 0 \mid (|a_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\})$.

Proposition 33.

- *Si $|z| < R$, la série $\sum a_k z^k$ converge,*
- *Si $|z| > R$, la série $\sum a_k z^k$ diverge (grossièrement).*

Corollaire 34. *On a $R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.*

Application 35. Si $\sum a_k z^k$ et $\sum b_k z^k$ sont des séries entières de rayons de convergence R_a et R_b, alors leur produit de Cauchy a un rayon de convergence supérieur à $\min(R_a, R_b)$.

Exemple 36. [Différents comportements possibles en R]

- si $a_n = 1$, on a convergence sur $\mathbb{D}_1(0)$.
- si $a_n = 1/n$, on a convergence sur $\overline{\mathbb{D}}_1(0,1) \setminus \{1\}$.
- si $a_n = 1/n^2$, on a convergence sur $\overline{\mathbb{D}}_1(0,1)$.

Théorème 37. [Théorème d'Abel]
Soit $f : z \longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Alors pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$, on a

$$\lim_{z\to 1, z\in\Delta_\alpha} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \quad \text{où } \Delta_\alpha = \left\{ z = 1 - \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha] \right\}$$

Théorème 38. [Théorème taubérien faible]
Soit $f : z \longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $a_n = o(1/n)$ et qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} S$. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} a_n = S$.

Proposition 39. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est normale sur tout disque $\overline{\mathbb{D}}_r(O)$ de rayon $r < R$. En particulier, la série entière est continue sur $\mathbb{D}_R(O)$.*

IV. B. Vers la formule d'Euler-Maclaurin

[Gou08, §4.7, p301]

Définition 40. [Nombres et polynômes de Bernoulli]
$z \longmapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathbb{D}_r(0)$ pour un $r > 0$.

- On note $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$ sur ce disque.
- Il existe une suite de polynômes, notée $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\frac{z\, e^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$ par produit de Cauchy.

Proposition 41. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}$, on a :*

(i) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$,
(ii) $B'_{n+1} = (n+1) B_n$,
(iii) $B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$,
(iv) $B_n(0) = B_n(1) = b_n$ *pour* $n \geq 2$,
(v) $b_{2n+1} = 0$.

Théorème 42. [Formule d'Euler-Maclaurin]
Soient $m < n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $f : [m, n] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^r$. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2}[f(m) + f(n)] + \sum_{\ell=2}^{r} \frac{b_\ell}{\ell!} [f^{(\ell-1)}(n) - f^{(\ell-1)}(m)] + R_r$$

où $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t) dt$ où $\tilde{B}_r(t) = B_r(t - \lfloor t \rfloor)$.

Application 43. [Série harmonique]
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On a $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{\ell=1}^{r-1} \frac{b_{2\ell}}{2\ell} \frac{1}{n^{2\ell}} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right)$.

COMMENTAIRES

Speech : une bonne manière de faire consiste à se poser des questions (teaser) puis d'introduire les outils qui y répondent.

QUESTIONS

Q Montrer que la convergence d'une série entière de rayon de convergence R est uniforme sur un disque $\overline{\mathbb{D}}_r(O)$ avec $r < R$.

Q Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

R Écrire $u_n = \cos(n\pi\sqrt{1+1/n+1/n^2})$ et faire un développement limité.

Q Supposons $u_n S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de u_n.

R On vérifie que la série diverge et que le terme général tend vers 0. On écrit

$$S_n^2 - S_{n-1}^2 = u_n(2S_n - u_n) = 2S_n u_n - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

d'où $S_N^2 = \sum_{n=1}^N S_n^2 - S_{n-1}^2 \sim 2N$ et donc $u_N^2 \sim 1/S_N^2 \sim \frac{1}{2N}$. Finalement $u_N \sim \frac{1}{\sqrt{2N}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[FGN07] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas : *Oraux X-ENS - Analyse 1*. Cassini, 2007.

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.