229 FONCTIONS MONOTONES. FONCTIONS CONVEXES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Fonctions monotones

I. A. Généralités [RDO98, §4.3, p118] [Gou08, §4.3, p228]

Fonction monotone, exemples et contre-exemples
Caractérisation avec la dérivée
Exemples : fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle, monotonie d'une homographie
Stabilités par somme, produit
Existence d'une limite à gauche, à droite
Ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable
Théorème de DINI

I. B. Fonctions à variation bornées [RDO98, §4.3, p114] [Gou08, §2.4, p114]

II. Fonctions convexes [Gou08, §1.5/2.3, p51/94] [BMP05, §1.5.1, p26]

II. A. Généralités

DÉFINITION 1. $A \subset E$ est convexe si $\forall a, b \in A, \forall t \in [0,1], (1-t)a + tb \in A$.

EXEMPLE 2. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe, une boule de E est convexe.

DÉFINITION 3. $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite

- convexe si $\forall a, b \in E, \forall t \in]0,1[, f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$,
- strictement convexe si $\forall a, b \in E, \forall t \in]0,1[, f((1-t)a+tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$,
- concave si $-f$ est convexe.

EXEMPLE 4. Une application affine est convexe et concave.

EXEMPLE 5. Toute norme $\|.\|$ de E est convexe, non strictement convexe dès que $E \neq \{0\}$.

PROPOSITION 6. *$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si*

- $E_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y\}$ *est convexe,*
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in E^n, \forall (t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, f(\mathrm{Bar}((a_i, t_i)_i)) \leq \mathrm{Bar}((f(a_i), t_i)_i))$.

II. B. Liens entre convexité et monotonie

PROPOSITION 7. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si :*

- *pour tout $a \in I$, $x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$,*
- *pour tout $a, x \in I$, $f'(a)(x-a) + f(a) \leq f(x)$,*
- *f' est croissante,*
- *$f'' \geq 0$.*

les trois dernières équivalences ayant lieu lorsque f est assez régulière ($\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$).
On déduit de la première équivalence qu'une fonction convexe sur I est continue sur I° et admet une dérivée à droite et à gauche en tout point de I°.

EXEMPLE 8. $\exp$ est convexe, $\log$ est concave. Fonction convexe non continue : voir annexe.

III. Applications

III. A. Inégalités de convexité [Gou08, §1.5/2.3, p51/94] [BMP05, §1.5.1, p26]

EXEMPLE 9. On a des inégalités provenant de la convexité/concavité de certaines fonctions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq 1 + x \qquad \forall y \in]-1, +\infty[, \ln(1+y) \leq y \qquad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}\theta \leq \sin(\theta) \leq \theta$$

PROPOSITION 10. **[INÉGALITÉ ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE]**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Alors $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$.

EXEMPLE 11. On peut généraliser pour toute famille $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$(a_1^{b_1} \ldots a_n^{b_n})^{1/b} \leq \frac{1}{b}\sum_{i=1}^n b_i a_i \qquad \text{où} \quad b = \sum_{i=1}^n b_i$$

PROPOSITION 12. **[INÉGALITÉ DE YOUNG]** *Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.*

APPLICATION 13. **[INÉGALITÉS DE HÖLDER ET DE MINKOWSKI]**
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty]$ et q sont exposant conjugué. Pour toutes fonctions $f, g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables, on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, puis $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire.

PROPOSITION 14. **[INÉGALITÉ DE JENSEN]**
Si $X \in L^1$ et ϕ est convexe, alors $\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)]$. De plus, si ϕ est strictement convexe, on a égalité si et seulement si X est constante presque sûrement.

Application 15. Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\theta)$ pour un paramètre $\theta > 0$ inconnu. Alors $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur sans biais fortement convergeant de $\mathbb{E}[\mathcal{E}(\theta)] = \frac{1}{\theta}$. Alors $\frac{1}{\overline{X}_n}$ est un estimateur fortement convergeant avec biais de θ.

Proposition 16. [Inégalité de Hoeffding] *Soient $(X_i)_{1\le i\le n}$ des variables aléatoires indépendantes telles que pour tout i, $X_i \in [a_i, b_i]$ p.s. pour des réels $a_i \le b_i$. Alors pour tout $t \ge 0$:*

$$\mathbb{P}(|\textstyle\sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}[X_i]| \ge t) \le 2\exp(-2t^2/\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2)$$

Application 17. Soient $(X_i)_{1\le i\le n}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de Rademacher centrées, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Alors :

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(|\textstyle\sum_{i=1}^n X_i| \ge t) \le 2\exp(-\frac{t^2}{2n})\mathbb{1}_{t\le n}$$

III. B. Étude de suites récurrentes [El 11, §1.5/2.2, p38/91] [Ouv09, p162/508]

Suite récurrente : selon la monotonie, le signe de $u_{n+1}u_n$ est soit constant soit alterné
Comparaison série-intégrale. Application : série harmonique

Définition 18. [Fonction génératrice, fonction caractéristique] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ presque sûrement. On définit g_X la fonction génératrice de X par $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k\ge 0}\mathbb{P}(X = k)s^k$ (lorsque la série converge).

Proposition 19. *g_X est bien définie, croissante et convexe sur $[0,1]$. Si de plus $P(X = k) > 0$ pour au moins un $k \ge 2$, alors g_X est strictement convexe sur $[0,1]$.*

Proposition 20. [Processus de branchement de Galton-Watson] *Soient $(X_i^j)_{i,j\ge 1}$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note μ leur loi, m leur espérance et on définit le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. et enfin $\rho = \mathbb{P}(\exists n \ge 0 \,|\, Z_n = 0)$. Alors si $\mu \ne \delta_1$, on a :*
- *si $m \le 1$, $\rho = 1$ et on a extinction du processus presque surement,*
- *si $m > 1$, $\rho < 1$ et il y a une probabilité strictement positive de survie.*

IV. Convexité et optimisation
[Rou99, Ch4, p140] [FGN07, §4.51, p287] [FGN12, §4.51, p39–41]

On a la même définition de la convexité pour une fonction f définie sur un convexe de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 21. *Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$.*
- *Si f est différentiable, f est convexe (resp. strictement convexe) si et seulement si pour tout $x \ne y \in \mathbb{R}^p$, $f(y) - f(x) \ge \langle \nabla f(x) \mid y - x\rangle$ (resp. $f(y) - f(x) > \langle \nabla f(x) \mid y - x\rangle$,*
- *Si f est $\mathcal{C}^2$, f est convexe (resp. strictement convexe) si et seulement si $\nabla^2 f(x)$ est positive (resp. définie positive) pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.*

Exemple 22. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax \mid x\rangle - \langle b \mid x\rangle + c$.
Si A est positive (resp. définie positive), f est convexe (resp. strictement convexe). Ainsi par exemple si $(E, \langle . \mid . \rangle)$ est euclidien, l'application $x \longmapsto \|x\|^2$ est strictement convexe.

Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Proposition 23. *Soit C un convexe de $\mathbb{R}^p$ et $M = \{x \in C \,|\, f(x) = \inf_C f\}$ l'ensemble des minimums globaux de f sur C.*
On suppose qu'il existe un minimum local $x_\star$ de f sur C. Alors :
- *M est un ensemble convexe et $x_\star \in M$ est un minimum global,*
- *si de plus f est strictement convexe, alors $M = \{x_\star\}$.*

Théorème 24. [Méthode de Newton] *Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$, où $c < d$, et telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$.*
On considère la suite récurrente définie par $x_0 \in [c,d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Alors en notant a l'unique 0 de f, on a :
- *(i) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique et il existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \le C\,|x_n - a|^2$.*
- *(ii) si de plus $f'' > 0$ (f est strictement convexe) sur $[a,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n\to+\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.*

Application 25. Approximation des zéros d'un polynôme.

Théorème 26. [Méthode de gradient à pas optimal] *Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ elliptique, c'est-à-dire f est $\mathcal{C}^1$ et telle qu'il existe $\alpha > 0$ satisfaisant*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^p, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y) \mid x - y\rangle \ge \alpha\,\|x - y\|^2$$

On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathbb{R}^p$ et $x_{n+1} = x_n - \rho_n\nabla f(x_n)$ où $\rho_n = \operatorname{argmin}_{\rho>0} f(x_n - \rho\nabla f(x_n))$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique minimum global de f.

Application 27. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. L'application $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax \mid x\rangle - \langle b \mid x\rangle$ admet un unique minimum $\overline{x}$ caractérisé par $\nabla f(\overline{x}) = A\overline{x} - b = 0$. On converge vers cette solution par l'algorithme de gradient à pas optimal.

COMMENTAIRES

Le plan est un peu facile ici, il serait mieux d'essayer de mettre en parallèle les deux notions. Le théorème de DINI est important car en utilisant la monotonie, il permet de remplacer une hypothèse pas toujours facile à montrer dans le cas général.

QUESTIONS

Q Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $g^2 = 2g - \mathrm{id}$. Montrer que g est bijective.

R Si $g(x) = g(y)$, l'égalité fonctionnelle donne $x = y$, donc g est injective.
g est injective donc strictement monotone, donc bijective ...

Q Que dire d'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{R}^+$) et majorée ?

R Elle est constante (resp. converge vers une limite $\ell \in]-\infty, +\infty]$).

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[El 11] M. EL AMRANI : *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2011.

[FGN07] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS : *Oraux X-ENS - Analyse 1*. Cassini, 2007.

[FGN12] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS : *Oraux X-ENS - Analyse 4*. Cassini, 2012.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Ouv09] J.-Y. OUVRARD : *Probabilités : Tome 2*. Cassini, 3ème édition, 2009.

[RDO98] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX : *Cours de mathématiques 3, Topologie et éléments d'analyse*. Dunod, 1998.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.