228 CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

I. Généralités autour de la continuité et de la dérivabilité [Gou08, §2.1, p69]

I. A. Définitions et exemples [Gou08, §1.1/2.3, p12/94]

Continuité, dérivabilité, exemple de fonctions continue, dérivable, continue non dérivable (valeur absolue), de dérivée non continue ($x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$)
Dérivabilité implique continuité
Lien avec les développements limités
Fonctions lipschitziennes, notion d'uniforme continuité
Fonctions convexes

I. B. Propriétés de stabilité et dérivations successives

Stabilité par composition, somme, produit, formules de la dérivée associée ...
Dérivée de la fonction réciproque lorsque f' ne s'annule pas ...
Formule de LEIBNIZ

II. Résultats autour de la continuité et de la dérivabilité [Gou08, §2.1, p69]

II. A. Théorème des valeurs intermédiaires [Gou08, §1.3/1.4, p31/41]

TVI, applications basiques : il existe un zéros entre a et b si $f(a)f(b) < 0$, un polynôme de degré impair admet une racine
Une fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes
Cas d'une fonction continue coercive sur $\mathbb{R}$

II. B. Théorème de HEINE [Gou08, §1.3, p31]

Théorème de HEINE.
Exemples : fonctions continues périodiques, ou continues avec une limite finie en $\pm\infty$, deuxième théorème de DINI

II. C. Théorème de ROLLE et accroissement finis

Théorème de ROLLE, inégalité des accroissements finis, règle de l'Hospital

II. D. Densité des polynômes [QZ13, §XIII.II.1, p518–519]

THÉORÈME 1. [THÉORÈME DE WEIERSTRASS]
$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}, \|.\|_\infty)$ pour $a < b \in \mathbb{R}$.

Cas où $I = \mathbb{R}$: cela ne fonctionne plus
Si $\int_a^b f(x)x^n dx = 0$ pour tout n alors $f = 0$ si f est continue
Plus généralement théorème de STONE-WEIERSTRASS $\to$ densité des polynômes trigonométriques

II. E. Formules de TAYLOR [Rou99, Ch6, p278]

Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-YOUNG
Formule de TAYLOR pour un polynôme ...
Application : méthode de NEWTON

III. Théorèmes de passage à la limite

III. A. Suites de fonctions [AF91, El 11]

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
Prolongement par continuité de f.

EXEMPLE 2. [Hau07, p235] Pour $f_n : x \in [0, 1] \longmapsto x^n$, on a $\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to1^-} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to1^-} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

THÉORÈME 3. *Soit $a \in \overline{I}$ tel que $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{R}$ et $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$ sur un voisinage de a. Alors $\lim_{n\to+\infty} \ell_n$ et $\lim_{x\to a} f(x)$ existent et sont égales. Autrement dit :*

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

THÉORÈME 4. *Dans le même contexte, si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues en a et si $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$ sur un voisinage de a, alors f est continue en a.*

EXEMPLE 5. $\zeta : x > 1 \longrightarrow \sum_{n\geq1} \frac{1}{n^x}$ est continue et $\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

APPLICATION 6. Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur $\mathbb{D}_R(O)$.

Remarque 7. On ne peut rien dire sur le cercle de convergence : par exemple avec $\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ définie pour $|z| < 1$, on a $\frac{1}{1+z} \underset{z\to 1}{\longrightarrow} 1/2$ mais $\sum(-1)^n$ diverge.

Proposition 8. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que $f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{u} g$ et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f$. Alors $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$ et $f' = g$.*

Corollaire 9. *Si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $\mathcal{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ et telles que $f_n^{(p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{s} g_p$ pour $p \leq k$ avec $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{u} g_k$, alors $g_0 \in \mathcal{C}^k([a,b],\mathbb{R})$, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} g_0$ et $g_0^{(p)} = g_p$ pour $p \leq k$.*

Exemple 10. Soit $f_u : t \longmapsto \exp(tu)$ $(u \in \mathbb{R})$. Alors f_u est $\mathcal{C}^\infty$ et $f_u^{(p)} : t \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^{n-p}}{(n-p)!}u^n$.

Exemple 11. [Hau07, p241] Importance de la convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$: considérer $f_n(x) = \sqrt{x^2+1/n}$.

III. B. Intégrales dépendant d'un paramètre

[BP15, §8.3, p140–147] [Far00, §VII.2, p98]

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

Théorème 12. [Continuité sous le signe intégrale]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :
- *pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable,*
- *pour μ-presque tout x, $t \longmapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in I$,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $t \in I$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors $t \longmapsto \int_E f(t,x)d\mu(x)$ est bien définie sur I et est continue en t_0.

Application 13. La fonction Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 14. [Dérivation sous le signe intégrale]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :
- *pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(t,x)$ est intégrable sur E,*
- *pour μ-presque tout x, $t \longmapsto f(t,x)$ est dérivable sur I,*
- *il existe g intégrable telle que pour tout $t \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ μ- p.p..*

Alors $F : t \longmapsto \int_E f(t,x)d\mu(x)$ est définie, dérivable sur I et $F' : t \longmapsto \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)d\mu(x)$.

Application 15. Prenant $f : (t,x) \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{e}^{-tx}$, on montre que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Commentaires

Faire un dessin de la continuité et de la dérivabilité lors du speech.
La difficulté de la leçon est d'aller plus loin que le programme du lycée voire de sup. C'est une leçon vague qui peut aller jusqu'aux distributions si on est à l'aise dessus. Le plan continuité puis dérivabilité n'est pas forcément le plus palpitant : plutôt essayer de trouver des liens, faire un plan par thèmes.
Il est important de mettre beaucoup d'exemples et de contre-exemples.
On peut également parler du théorème de Dini, du théorème fondamental de l'analyse (avec la formule de Taylor avec reste intégral !) ou du théorème d'Ascoli.

Questions

Q Continuité au sens de Cesàro : que peut-on dire de f telle que pour toute suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ au sens de Cesàro, alors $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ au sens de Cesàro ?

R On montre qu'une telle application conserve les barycentres …

Bibliographie

[AF91] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse : *Cours de mathématiques, Tome 2, Analyse*. Dunod, 1991.

[BP15] M. Briane et G. Pagès : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[El 11] M. El Amrani : *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2011.

[Far00] J. Faraut : *Calcul intégral*. Belin, 2000.

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Hau07] D. Hauchecorne : *Les contre-exemples en Mathématiques*. Ellipses, 2ème édition, 2007.

[QZ13] H. Queffélec et C. Zuily : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[Rou99] F. Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.