$\boxed{224}$ EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE SUITES ET DE FONCTIONS.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et (X, d) un espace métrique.

I. Comparaison de suites et de fonctions [Gou08, §2.2, p85–93]

I. A. Relations de comparaison

Définition 1. Soient f et g deux applications de $D \subset X$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit a un point d'accumulation de D. On dit qu'au voisinage de a :

- f est dominée par g, et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, si $\exists C > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathcal{V} \cap D, \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$,
- f est négligeable devant g, et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathcal{V} \cap D, \|f(x)\| \leq \varepsilon\|g(x)\|$,
- f et g sont équivalentes, et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, si $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Remarque 2. Ces définitions sont valables pour des suites numériques : prendre $X = \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a = +\infty$. Dans ce cas, on omettra le $n \to +\infty$ qui est implicite.

Exemple 3.

- $n^2 + \sin(n) = O(n^2)$ et $n^2 + \sin(n) \sim n^2$,
- Pour $\alpha, \beta > 0$, $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$ et $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta^x)$,
- Si $f(x) = 3x^5 - x^4 + x^2$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^6)$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x^5$.

Proposition 4. *On les propriétés suivantes :*

(i) *o et O sont stables par somme, c'est-à-dire si $f = o(\varphi)$ et $g = o(\varphi)$, alors $f + g = o(\varphi)$, et de même avec O,*

(ii) *o, O et $\sim$ sont stables par produit, passage à une puissance. Par exemple si $f = O(\varphi_1)$ et $g = O(\varphi_2)$, alors $fg = O(\varphi_1\varphi_2)$, puis si $f \sim \varphi_1$ et $g \sim \varphi_2$, alors $fg \sim \varphi_1\varphi_2$.*

Remarque 5. La relation $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition : $n+2 \sim n+1$ et $-n \sim -n$ mais $2 \not\sim 1$.

I. B. Développement limité

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. On considère $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Définition 6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in I$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a (noté $\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que, au voisinage de a, on a $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.

Dans la suite quitte translater f, on supposera que $a = 0$ (et donc $0 \in I$).

Théorème 7. [Formule de Taylor-Young] *Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet le $\mathrm{DL}_n(0)$ suivant :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Exemple 8. Développements limités de fonctions usuelles. [Voir annexe].

Application 9. [Théorème central limite] Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de carré intégrable. Alors :

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}}\textstyle\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_1]) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} Z \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$$

Proposition 10. *f est continue (resp. dérivable) en 0 si et seulement si f admet un $\mathrm{DL}_0(0)$ (resp. $\mathrm{DL}_1(0)$).*

Remarque 11. On ne peut pas généraliser ce résultat à $n > 1$: par exemple pour f définie par $f(x) = x^3\sin(\frac{1}{x})$, on a que f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Proposition 12. *Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors il est unique.*

Proposition 13. [Dérivation/intégration de DL] *On a les propriétés suivantes :*

(i) *Si f et dérivable et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$, alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de la forme $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} + o(x^{n+1})$,*

(ii) *Si f est $n \geq 2$ fois dérivables en 0, alors f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$.*

Proposition 14. [Somme et produit de DL] *Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une autre application. Supposons que f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$ et écrivons $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$ avec $P_n, Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors :*

(i) *$f + g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et $(f+g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + o(x^n)$,*

(ii) *$f \times g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et $(f \times g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$ où R_n est le reste de la division euclidienne de P_nQ_n par X^{n+1}.*

(iii) *Si $g(0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et $(f/g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est l'unique polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que P_n s'écrit $P_n = R_nQ_n + X^{n+1}S_n$, avec $\deg(S_n) \leq n$.*

PROPOSITION 15. [COMPOSITION DE DL]
Soit $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ une autre application, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $x_0 = f(0) \in J$. Supposons que $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et que $g(x_0+h) = Q_n(h) + o(h^n)$ admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$.
Alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et $g \circ f(x) = R_n(x) + o(x^n)$ où R_n est le reste de la division euclidienne de $Q_n \circ P_n$ par X^{n+1}.

APPLICATION 16. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\arcsin$ à partir du $\mathrm{DL}(0)$ de $\sin$.

I. C. Développement asymptotique

DÉFINITION 17. Soit $a \in \overline{X}$. On appelle échelle de comparaison un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de a dans X sauf éventuellement en a, et telles que si $f, g \in \mathcal{E}$, alors $f = g$ ou bien $f = o(g)$ ou bien $g = o(f)$.

EXEMPLE 18. $X = \mathbb{R}$, $a = +\infty$: $\mathcal{E}_1 = \{x \longmapsto x^\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{E}_2 = \{x \longmapsto x^\alpha (\ln(x))^\beta \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

DÉFINITION 19. Soient $f : D \subset X \longrightarrow \mathbb{K}$ un application et a un point d'accumulation de D dans X. Soit $k \in N^*$. On appelle développement asymptotique à k termes de f par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ au voisinage de a (noté $\mathrm{DA}_k(a)$) toute expression de la forme $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_k f_k$ telle que $(c_i)_{1 \le i \le k} \in \mathbb{K}^k$, $(f_i)_{1 \le i \le k} \in \mathcal{E}^k$ et :
(i) $f_{i+1} \underset{a}{=} o(f_i)$ pour tout $1 \le i \le k-1$,
(ii) $f(x) \underset{x \to a}{=} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_k f_k(x) + o(f_k(x))$.

PROPOSITION 20. *A $\mathcal{E}$ fixé, le DA_k, s'il existe, est unique.*

REMARQUE 21. Un développement limité est un développement asymptotique par rapport à l'échelle de comparaison constituée des fonctions du type $x^\alpha (\alpha \in \mathbb{N})$. On en déduit l'unicité du développement limité à tout ordre. Notons que l'on peut généraliser le DL à $a = +\infty$ si $+\infty \in \overline{I}$ en considérant $\mathcal{E} = \{x \longmapsto x^{-\alpha} \,|\, \alpha \in \mathbb{N}\}$ et on se ramène en 0 en posant $X = 1/x$.

APPLICATION 22. Les DA permettent de préciser la position relative d'une courbe par rapport à une tangente ou une asymptote. Par exemple, considérons $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{120x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)\right)$ lorsque $x \to +\infty$ donc $y = x^2 - \frac{1}{6}$ est une asymptote par valeurs inférieures de f en $+\infty$.

II. Exemples de développements asymptotiques de suites

II. A. Séries numériques

[Gou08, §4.2, p201–206]

THÉORÈME 23. [SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON]
Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Notons $S_n(u) = \sum_{k \le n} u_k$ et $R_n(u) = \sum_{k > n} u_k$ (et de même $S_n(v)$ et $R_n(v)$) les sommes partielles et restes d'ordre $n \in \mathbb{N}$ associés. Alors :

	$u_n = o(v_n)$	$u_n = O(v_n)$	$u_n \sim v_n$
$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n < +\infty$	$R_n(u) = o(R_n(v))$	$R_n(u) = O(R_n(v))$	$R_n(u) \sim R_n(v)$
$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n = +\infty$	$S_n(u) = o(S_n(v))$	$S_n(u) = O(S_n(v))$	$S_n(u) \sim S_n(v)$

THÉORÈME 24. [COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante continue par morceaux.
Alors la série de terme général (positif) $\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ converge.
En particulier, $\sum f(k)$ et $(\int_0^n f(t)dt)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même nature et on a :
- *si $\sum f(k)$ converge, alors $\int_{n+1}^\infty f(t)dt \le \sum_{k \ge n} f(k) \le \int_n^\infty f(t)dt$,*
- *si $\sum f(k)$ diverge, alors $\sum_{k \ge n} f(k) \sim \int_0^n f(t)dt$.*

APPLICATION 25. [SÉRIES DE BERTRAND] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

EXEMPLE 26. [Gou08, p.203] Développement asymptotique de la série harmonique (suite) à l'ordre 3 : $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$.

DÉFINITION 27. [NOMBRES ET POLYNÔMES DE BERNOULLI]
$z \longmapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathbb{D}_r(0)$ pour un $r > 0$.
- On note $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \ge 0} \frac{b_n}{n!} z^n$ sur ce disque.
- Il existe une suite de polynômes, notée $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $\frac{z\, e^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n \ge 0} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$ par produit de CAUCHY.

PROPOSITION 28. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}$, on a :*

(i) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$,
(ii) $B'_{n+1} = (n+1) B_n$,
(iii) $B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$,
(iv) $B_n(0) = B_n(1) = b_n$ *pour* $n \ge 2$,
(v) $b_{2n+1} = 0$.

Théorème 29. [Formule d'Euler-Maclaurin] [Gou08, §4.7, p301]
Soient $m < n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $f : [m,n] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^r$. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \sum_{\ell=2}^{r} \frac{b_\ell}{\ell!}[f^{(\ell-1)}(n) - f^{(\ell-1)}(m)] + R_r$$

où $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \tilde{B}_r(t)f^{(r)}(t)dt$ où $\tilde{B}_r(t) = B_r(t - \lfloor t \rfloor)$.

Application 30. [Série harmonique]
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On a $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{\ell=1}^{r-1} \frac{b_{2\ell}}{2\ell}\frac{1}{n^{2\ell}} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right)$.

II. B. Suites récurrentes [FGN07, p99–103]

Théorème 31. [Théorème de Cesàro]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Application 32. Soit f une application continue définie au voisinage de 0^+ admettant un développement asymptotique en 0 de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$, où $a > 0$ et $\alpha > 1$. Alors pour $u_0 > 0$ assez petit, la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ vérifie $u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.
Exemples de $f = \sin$ et $f = \log(1+.)$.

Application 33. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$. Alors on a le DA_2 suivant : $u_n = \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

II. C. Suites définies de manière implicite [FGN07, p127]

Les suites définies à partir d'une famille de polynômes sont fréquentes. On se ramène alors à l'étude de ses polynômes, sans forcément qu'il y ait de méthode générale.

Exemple 34. Soit a_n la plus grande racine réelle de $X^{2n} - 2nX + 1$.
Alors on a le DA_2 suivant : $a_n = 1 + \frac{\ln(2n)}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exemple 35. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.
Alors on a le DA_2 suivant : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

III. Exemples de développements asymptotiques de fonctions

III. A. Fonctions définies par une intégrale [Gou08, §3.4, p159]

Théorème 36. [Intégration des relations de comparaison]
Soient $I = [a,b[$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ des applications continues par morceaux sur I. Alors lorsque $x \to b^-$, on a les mêmes résultats qu'au théorème 23, en remplaçant les sommes partielles par des intégrales entre a et x, et les restes par des intégrales entre x et b, et la condition de sommabilité de v par l'intégrabilité de g.

Exemple 37. [Utilisation de l'intégration par parties] [Gou08, p169]
Pour $x \geq 2$, on définit le logarithme intégral $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Alors on a le $\mathrm{DA}_k(+\infty)$:

$$Li(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{1!x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(k-1)!x}{\log^k x} + o\left(\frac{x}{\log^k x}\right)$$

Proposition 38. [Méthode de Laplace] [Rou99, p322]
Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{e}^{-t_0\varphi} f$ soit intégrable pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et $f(a) \neq 0$, et que $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$. Alors :

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}$$

Application 39. [Formule de Stirling] On a $\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^t e^{-t}\sqrt{2\pi t}$.

III. B. Fonctions définies par la somme d'une série [Gou08, p154/282]

Exemple 40. Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}_{pm}$ et décroissante, telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et est non nulle. Alors pour $t > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Exemple 41. [Fonction Zeta]
Soit $\zeta : s \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Alors $\zeta(s) \underset{s\to1^-}{=} \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

III. C. Fonctions définies comme solution d'une équation différentielle

ANNEXE

Développements limités usuels en 0

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

SPEECH

Les développements asymptotiques et développements limités sont des outils apparaissant dans presque tous les domaines des mathématiques. Ils permettent en effet de comprendre le comportement typique d'une fonction ou d'une suite en un point ou en l'infini, en les comparant à des fonctions usuelles telles les puissances de x combinées avec des puissances de $\ln$.
Première partie : introduction des notations $o, O, \sim$ qui sont très pratiques de par leur stabilité et la malléabilité de l'écriture. On notera toutefois qu'il faut faire attention avec les équivalents. On introduit d'abord les développements limités parce que dans un cours de sup, il vaut mieux considérer d'abord ce cas qui est plus simple et évite des notations lourdes que les étudiants auraient du mal à assimiler. On étend ensuite cela aux développements asymptotiques qui la plupart du temps utilisent les familles de l'exemple.
Dans la suite, les développements asymptotiques étant avant tout des outils, on doit surtout les illustrer par une multitude d'exemples, les plus variés possibles. Dans un premier temps, on étudie les exemples de développements asymptotiques de suites. Les suites auxquelles on s'intéresse sont celles que l'on retrouve fréquemment comme les séries, les suites numériques ou encore les suites définies à partir de polynômes.
Enfin les développements asymptotiques de fonctions sont aussi fréquents. Là encore on s'intéresse à des fonctions définies de manières classiques : intégrales à paramètres, séries de fonctions, ou encore solutions d'équations différentielles.

COMMENTAIRES

Il faut s'entrainer pour être à l'aise avec toutes les méthodes ... Leçon avec des outils de niveau prépa mais qui peut être rapidement compliquée.

QUESTIONS

- Q Trouver un DA de la série des $1/k^2$ (en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin).
- Q Trouver le $\mathrm{DA}_3(0)$ de $\arcsin$.
- Q On pose $P_n = X^n + X^{n-1} + 2X - 1$. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $P_n(x_n) = 0$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 1. [FGN07, p127]

BIBLIOGRAPHIE

[FGN07] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas : *Oraux X-ENS - Analyse 1*. Cassini, 2007.

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Rou99] F. Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.