$\boxed{226}$ SUITES VECTORIELLES ET RÉELLES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE $u_{n+1} = f(u_n)$. EXEMPLES. APPLICATIONS À LA RÉSOLUTION APPROCHÉE D'ÉQUATIONS.

I. Généralités sur les suites récurrentes

I. A. Suites récurrentes réelles [Gou08, Ch4, p191]

Définition à tout ordre, on se place dans le cadre ordre 1 (en fait en utilisant un cadre matriciel on pourra toujours se ramener à ce cas-là)
Exemples des suites arithmétiques, géométriques, homographiques
Propriétés de monotonie lorsque f est croissante/décroissante sur des intervalles stables
Lemme de la grenouille [FGN07, §2.19, p86]

I. B. Suites récurrentes vectorielles

Permet notamment de se ramener à un ordre 1
Équation caractéristique
Application à la résolution d'une suite récurrente linéaire d'ordre p.
Exemple de la suite de Fibonacci

II. Points fixes et suites récurrentes

II. A. Théorèmes de points fixes [Dem96, ChIV, p93] [Rou99] [Gou08, §1.2, p21–23]

Définition d'un point fixe, toute suite récurrence convergente converge vers un point fixe de f
Exemples d'existence de points fixes (théorème des valeurs intermédiaires) : $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue, $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\limsup_{x\to+\infty} f(x)/x < 1$.
Théorème du point fixe de Picard, corollaire avec une itérée
Exemple/contre-exemple
Vitesses de convergence en fonction de la dérivée, point fixe attractif, répulsif (schémas), exemple du sinus itéré

II. B. Applications en probabilités [BL07, ChVIII, p193]

Noyau de transition, chaînes de Markov, mesure invariante, existence, cas de non unicité …
Existence dans le cas E fini, convergence sous conditions vers la mesure invariante

Proposition 1. [processus de branchement de Galton-Watson]
Soient $(X_i^j)_{i,j\geq 1}$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note μ leur loi, m leur espérance et on définit le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. et enfin $\rho = \mathbb{P}(\exists n \geq 0 \,|\, Z_n = 0)$. Alors si $\mu \neq \delta_1$, on a :
- *si $m \leq 1$, $\rho = 1$ et on a extinction du processus presque surement,*
- *si $m > 1$, $\rho < 1$ et il y a une probabilité strictement positive de survie.*

III. Application à la résolution d'équations par des méthodes itératives

III. A. Méthode de Newton [Dem96, ChIV, p93] [Rou99]

Théorème 2.
Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$, où $c < d$, et telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. On considère la suite récurrente définie par $x_0 \in [c,d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Alors en notant a l'unique 0 de f, on a :
(i) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique : il existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - a| \leq C\,|x_n - a|^2$.
(ii) si de plus $f'' > 0$ sur $[a,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n\to+\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

Et en dimension quelconque

III. B. Méthodes de descente de gradient [FGN12, §, p39]

Méthodes de descente de gradient
Gradient à pas optimal

III. C. Résolution de systèmes linéaires [AK02, PIV, p153]

Idée : décomposition régulière $A = M - N$ avec M facile à inverser
On définit $x_0 \in \mathbb{K}^n$ et $x_{n+1} = M^{-1}(Nx_n + b)$. Si cette suite converge, la limite est la solution de $Ax = b$
Théorème : la méthode itérative converge pour tout x_0 si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$. Dans ce cas, vitesse de convergence est géométrique
Exemple : méthode de Richardson
Pour une matrice A hermitienne définie positive, si M, N est une décomposition satisfaisante, on a $M^* + N$ est hermitienne et si elle est définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$
Méthode de Jacobi : on prend pour D la diagonale de A. On a $M^{-1}N = I_n - D^{-1}A$ (on peut supposer D inversible quitte à permuter les colonnes de A)
Si A est hermitienne, on a convergence si A et $2D - A$ sont définies positives
Méthode de Gauss-Seidel : on prend pour M la matrice triangulaire inférieure issue de A, et pour N l'opposé des coefficients restants. Si A est hermitienne définie positive, on a la convergence de la méthode car $M^* + N$ l'est aussi
Remarque : les itérations correspondent à un calcul matriciel, on a donc n^2 opérations. Les

inversions de M nécessitent n opérations pour JACOBI, $n^2/2$ pour GAUSS-SEIDEL, donc pour un nombre d'itération $\ll n$, ces méthodes sont plus rapides que les méthodes directes

III. D. Recherche de valeurs propres [AK02, Ch15, p215]

Méthode de la puissance pour trouver la plus grande valeur propre en module, ainsi qu'un vector propre, vitesse géométrique
Matrices de GIVENS, méthode de JACOBI : $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(i)})$ pour un $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

ANNEXE

Suites du sinus itéré
Méthode de NEWTON en dimension 1
Points fixes attractifs/répulsifs, selon la valeur de $|f'|$ et le signe de f'

COMMENTAIRES

Une leçon facile à remplir, il faut sélectionner ce sur quoi on est à l'aise.

QUESTIONS

Q Étudier la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = \sin(x_n)$. Donner un équivalent.

R $x_n \in [-1,1]$ pour $n \geq 1$ et si $f = \sin$, on a que f est croissante sur cet intervalle donc la suite est monotone et converge vers un point fixe de f sur cet intervalle. Cela ne peut être que 0. Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En utilisant le DL_3 de $\sin$, on a que $x_{n+1} - x_n \sim -\frac{x_n^3}{6}$.
On étudie $x_{n+1}^\beta - x_n^\beta$ qui converge vers la limite finie $\frac{1}{3}$ pour $\beta = -2$.
On a donc par le théorème de CESÀRO que $x_n^{-2} \sim n/3$ et ainsi $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Q Si f est continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, montrer que $(x_n)_n$ converge si et seulement si $|x_{n+1} - x_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (lemme de la grenouille).

R Le sens direct est évident. Réciproquement, supposons que $(x_n)_n$ possède deux valeurs d'adhérence distinctes ℓ, ℓ', alors on a que $[\ell, \ell']$ est un ensemble de valeurs d'adhérences par hypothèse (faire un dessin). L'ensemble des valeurs d'adhérence est donc connexe. Vérifions qu'une valeur d'adhérence est un point fixe. Si $x_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$, alors $f(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow f(\ell)$ et par hypothèse on en déduit que $f(\ell) = \ell$. Comme on a un segment de valeurs d'adhérences, donc de points fixes, on a que dès qu'un des termes est dans le segment, la suite est constante. Ce qui contredit le fait que l'on ait deux valeurs d'adhérence. Donc il y a une unique valeur d'adhérence et la suite converge.

Q Considérons $\varphi : (a,b) \longmapsto (\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab})$. Montrer $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ont même limite. Montrer que la convergence de $(a_n - b_n)_n$ vers 0 est géométrique.

R On a que $a_n, b_n \in [\min(a_0,b_0), \max(a_0,b_0)]$ pour tout n. On vérifie par récurrence que $(a_n)_n$ est décroissante et $(b_n)_n$ est croissante et de plus $a_n \geq b_n$. Les deux suites sont donc convergentes. Si elles convergent vers ℓ_1, ℓ_2, alors on a $(\ell_1, \ell_2) = (\frac{\ell_1+\ell_2}{2}, \sqrt{\ell_1\ell_2})$, ce qui n'est possible que si $\ell_1 = \ell_2$.

Q Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\beta \|h\|^2 \geq \nabla^2 f(x)(h,h) \geq \alpha \|h\|^2$. Montrer que f a un unique minimiseur et donner un algorithme convergeant vers ce minimiseur.

R Utiliser la formule de TAYLOR avec reste intégral. Une méthode à descente de gradient convient.

BIBLIOGRAPHIE

[AK02] G. ALLAIRE et S.-M. KABER : *Algèbre linéaire numérique*. Ellipses, 2002.

[BL07] P. BARBE et M. LEDOUX : *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[Dem96] J.-P. DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences, 1996.

[FGN07] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS : *Oraux X-ENS - Analyse 1*. Cassini, 2007.

[FGN12] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS : *Oraux X-ENS - Analyse 4*. Cassini, 2012.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.