# 223 SUITES NUMÉRIQUES. CONVERGENCES, VALEURS D'ADHÉRENCE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Dans cette leçon, on considère des suites à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I. Autour de la convergence de suites [Gou08, §1.2/Ch4, p19/191]

Définition d'une suite convergente/divergente, exemples de $u_n = (1+1/n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ (ou plus simple …), de $u_n = (-1)^n$
Unicité de la limite, somme, produit de limites ... Une suite convergente est bornée
$\liminf, \limsup$ : existence et unicité, la suite converge vers $\ell$ si et seulement si $\ell = \liminf = \limsup$, exemple d'une suite sous-additive [QZ13]
Valeur d'adhérence, caractérisation, exemples
Convergence si on a une unique valeur d'adhérence
Théorème de Bolzano-Weierstrass
Exemples des suites arithmétiques et géométriques
Suites de Cauchy

## II. Comportements de suites réelles [El 11]

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans cette partie, sauf mention explicite (théorème de Cesàro)
Théorème des gendarmes, exemples
Suites adjacentes, exemple [Gou08, p198], segments emboités

### II. A. Comparaison asymptotique [Gou08, §2.2, p85–93]

**Définition 1.** Soient $u$ et $v$ deux suites. On dit qu'au voisinage de $+\infty$ :

- $v$ domine $u$, et on note $u_n = O(v_n)$, si $\exists C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, |u_n| \leq C\,|v_n|$,
- $u$ est négligeable devant $v$, et on note $u_n = o(v_n)$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon\,|v_n|$,
- $u$ et $v$ sont équivalentes, et on note $u_n \sim v_n$, si $u_n - v_n = o(v_n)$.

**Exemple 2.** $n^2 + \sin(n) = O(n^2)$ et $n^2 + \sin(n) \sim n^2$

**Proposition 3.** *On les propriétés suivantes :*

*(i) $o$ et $O$ sont stables par somme, c'est-à-dire si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$, et de même avec $O$,*

*(ii) $o$, $O$ et $\sim$ sont stables par produit, passage à une puissance. Par exemple si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(z_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n z_n)$, puis si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim z_n$, alors $u_n v_n \sim w_n z_n$.*

**Remarque 4.** La relation $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition : $n+2 \sim n+1$ et $-n \sim -n$ mais $2 \not\sim 1$.

Définition d'un développement asymptotique.

**Théorème 5. [Sommation des relations de comparaison]** *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Notons $S_n(u) = \sum_{k\leq n} u_k$ et $R_n(u) = \sum_{k>n} u_k$ (et de même $S_n(v)$ et $R_n(v)$) les sommes partielles et restes d'ordre $n \in \mathbb{N}$ associés. Alors :*

| | $u_n = o(v_n)$ | $u_n = O(v_n)$ | $u_n \sim v_n$ |
|---|---|---|---|
| $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n < +\infty$ | $R_n(u) = o(R_n(v))$ | $R_n(u) = O(R_n(v))$ | $R_n(u) \sim R_n(v)$ |
| $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n = +\infty$ | $S_n(u) = o(S_n(v))$ | $S_n(u) = O(S_n(v))$ | $S_n(u) \sim S_n(v)$ |

### II. B. Étude de suites récurrentes [FGN07, p99–103] [Gou08, Ch4, p191]

**Théorème 6. [Théorème de Cesàro]** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

**Application 7.** Soit $f$ une application continue définie au voisinage de $0^+$ admettant un développement asymptotique en 0 de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$, où $a > 0$ et $\alpha > 1$. Alors pour $u_0 > 0$ assez petit, la suite $u$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ vérifie $u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.
Exemples de $f = \sin$ et $f = \log(1+.)$.

**Application 8.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$. Alors on a le $\mathrm{DA}_2$ suivant : $u_n = \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Suites récurrentes linéaires [Gou08]

## III. Approximation [Dem96, ChIV, p93] [Rou99]

Approximation d'un irrationnel par des rationnels [Gou08, Ch4, p196]
Coefficient de convergence, convergence géométrique, quadratique
Suites récurrentes avec point fixe : vitesse de convergence en fonction de la dérivée en le point fixe ...
Méthode de Romberg-Richardson [Dem96, §III.5.2, p85]

**THÉORÈME 9.**
*Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$, où $c < d$, et telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. On considère la suite récurrente définie par $x_0 \in [c,d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.*
*Alors en notant $a$ l'unique $0$ de $f$, on a :*
*(i) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$ de manière quadratique et il existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - a| \leq C\,|x_n - a|^2$.*
*(ii) si de plus $f'' > 0$ sur $[a,d]$, alors pour tout $x_0 \in ]a,d]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $x_{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.*

Autre méthode : descente de gradient

## SPEECH

Étude les suites numériques permet de comprendre les nombres réels (constructions, suites des décimaux, …) et offre un cadre fondamental qui amène des applications en analyse, intégration, analyse complexe, probabilités, ….

## COMMENTAIRES

Une bonne introduction historique : [FGN07, p57].

## QUESTIONS

Q Pour quels $\theta \in \mathbb{R}$ la suite $(u_n = \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

R Distinguer selon que $\theta/\pi$ est commensurable ou non : si non la suite ne converge pas car elle est dense dans $[-1,1]$, si oui elle est périodique donc ne converge que si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Q Même exercice avec $(v_n = \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

R On montre qu'une suite converge si et seulement si l'autre converge. Nécessairement la limite est alors $0$ … Autre manière de faire : penser que $\cos(n\theta) = \Re(\mathrm{e}^{n\theta})$ puis utiliser le théorème de CESÀRO.

Q Donner un développement asymptotique de $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ où $u_1 = 1$.

R On montrer que $u_n \leq 2\sqrt{n} = o(n)$ par récurrence. Puis :

$$u_{n+1} = \sqrt{n}(\sqrt{1 + u_n/n}) = \sqrt{n}(1+1/2u_n/n+o(u_n/n)) = \sqrt{n}+1/2u_n/\sqrt{n}+o(u_n/\sqrt{n})$$

Donc $u_n \sim \sqrt{n}$ puis $u_{n+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$. En réinjectant on obtient

$$u_{n+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} + o(1/n)$$

## BIBLIOGRAPHIE

[Dem96] J.-P. DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences, 1996.

[El 11] M. EL AMRANI : *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2011.

[FGN07] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS : *Oraux X-ENS - Analyse 1*. Cassini, 2007.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.