SPEECH

L'idée de cette leçon est d'étudier quelques exemples illustrants des techniques de résolution d'ÉDP. Dans un premier il y a des méthodes directes, comme l'équation de transport résolue par un changement de variables dans le cas d'une vitesse constante. Dans le cas général on peut se placer sur une courbe sur laquelle l'ÉDP se transforme en une ÉDO. Ensuite pour l'équation des ondes, c'est encore un changement de variables qui permet d'obtenir une équation simple ; on obtient un cône de dépendance et d'influence. La théorie de FOURIER est un outil également utile : dans le cas périodique, les séries de FOURIER permettent sous certaines hypothèses de régularité, d'obtenir des solutions périodiques et plus généralement, on peut utiliser la transformée de FOURIER, par exemple en introduisant une transformée de FOURIER partielle par rapport à la variable d'espace qui va simplifier l'équation dans le domaine de FOURIER, on revient ensuite à la solution via la transformée de FOURIER inverse. Notons également les techniques hilbertiennes : les ÉDP n'ont pas nécessairement besoin d'hypothèses de régularité trop importantes : notion de solution faible. Pour finir on peut parler de l'équation de LAPLACE qui se résout en introduisant les fonctions harmoniques.

QUESTIONS

Q Pourquoi $H^1([0,1])$ est un espace normé ?

Q Pourquoi la convergence forte implique la convergence faible ?

Q Résoudre $\partial_t u + c\partial_x u = u$ avec condition initiale u_0.

R On considère une trajectoire $t \longmapsto (X(t),t)$ avec X de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $w : t \longmapsto u(X(t),t)$. On calcule $w'(t) = (X'(t)-c)\partial_t u(X(t),t) + w(t)$. Prenons $X(t) = a + ct$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a $w' = w$ donc $w = A\,\mathrm{e}^t$ pour $A \in \mathbb{R}$, et la condition initiale donne $A = u_0(a)$.
On a alors $w(t) = u_0(a)\,\mathrm{e}^t$ puis $u(x,t) = u(x-ct+ct,t) = u_0(x-ct)\,\mathrm{e}^t$.

Q Et en dimension supérieure ? Si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i} u = 0$?

R On a $\nabla u \in A^{\perp}$. Fixons une variable comme étant le temps, par exemple $t = x_n$. On prend $a_n = 1$ pour l'instant, de sorte que $\partial_u x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \partial_{x_i} u = 0$. Prenons $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $w : t \longmapsto u(X(t),t)$. On obtient $w'(t) = \sum_{i=1}^{n-1}(X_i'(t) - a_i)\partial_{x_i} u_i$.
On prend $X_i' = a_i$, de sorte que $X(t) = \zeta + \sum_{i=1}^{n-1} t a_i e_i$. Alors $w = A$ et donc $w(t) = u(X(0),0) = u_0(\zeta)$.

Q Résoudre $x\partial_x u + y\partial_y u = a\sqrt{x^2-y^2}$.

R Passons en coordonnées polaires : $u(x,y) = v(r,\theta)$. v vérifie $\partial_r v = a$ donc $v(r,\theta) = ar + c(\theta)$ puis $\lim_{\theta\to\pi} v = \lim_{\theta\to-\pi} v$ donc $\lim_{\theta\to\pi} \partial_\theta v = \lim_{\theta\to-\pi} \partial_\theta v$, et ainsi $c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$.