221 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Théorie des équations différentielles linéaires

[Ber17] [QZ13, ChX, p353] [Gou08, Ch6, p353]

I. A. Définitions et généralités

I. B. Existence et unicité de solutions globales, structure des solutions

Équation linéaire, théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ avec solutions globales

THÉORÈME 1. [THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ (CAS LINÉAIRE)]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$.
Alors il existe une unique solution y globale de $y' = Ay + B$ telle que $y(t_0) = y_0$.

I. C. Durée de vie des solutions

II. Résolution explicite

II. A. Équations à coefficients constants

[Ber17, Ch2, p25]

II. B. Méthode de la variation de la constante

Méthode de la variation de la constante, exemple d'une équation avec des solutions mêlant polynômes et exponentielles

II. C. Développements en séries entières

[QZ13, §X.VI, p408/435] [Gou08, p245]

Il est souvent judicieux de rechercher des solutions particulières d'équations différentielles sous forme de série entière, notamment lorsque les fonctions coefficients sont des polynômes.

THÉORÈME 2. *Soient $p(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n\geq 0} q_n x^n$ convergeant pour $x \in]-R, R[$ où $R > 0$. Alors pour tout $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution y sur $]-R, R[$ de $y'' + py' + qy = 0$ avec $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$, y étant développable en série entière.*

APPLICATION 3. Calcul des solutions de $y'' + xy = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, de $(1 - x^2)y'' - xfy' = 2$ sur $]-1, 1[$ ou de $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$ sur $]0, 1[$.

II. D. Changements de variables

[Gou08, §6.3, p371] [Ber17, §4.2, p133]

Équations de BERNOULLI, de RICATTI, ramenées à des équations différentielles linéaires

III. Étude qualitative

[Ber17, Ch5/6, p177–262] [QZ13, §X.IV, p380]

III. A. Définitions

Système autonome, les résultats de la première partie restent valables

III. B. Points d'équilibres et isoclines

Point d'équilibre, point stable, instable, asymptotiquement stable
Isocline $\to$ informations sur les champs de vecteurs tangents
Si $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x_\infty$ et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} y_\infty$, montrer que $f(x_\infty, y_\infty) = 0$.
Étude du système de LOKTA-VOLTERRA

III. C. Vers les équations non linéaires

[Ber17, §6.2, p239] [Rou99, §3.3, p127]

Stabilité du système linéaire en fonction des valeurs propres.
Noeuds, foyers, cols ...

THÉORÈME 4. [STABILITÉ DE LIAPOUNOV]
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Si les valeurs propres de $A = Df(0)$ sont toutes de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système $y' = f(y)$.

Exemples
Contre-exemple lorsque l'on n'a plus les hypothèses : il peut se passer n'importe quoi !

ANNEXE

Diagramme de stabilité des solutions
portrait de phase du système de LOKTA-VOLTERRA
Schéma d'EULER

COMMENTAIRES

Voir l'intro historique du [Gou08].
On peut définir les équations différentielles linéaires sur des espaces de BANACH ... mais ce n'est pas du tout une bonne stratégie : il faut faire attention quand on revient en dimension finie et cela engendre des difficultés. Bref rester dans $\mathbb{K}^n$. Il est important de bien travailler les premières questions post-développement : résolution d'une équation différentielle, exemple d'application du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ.

QUESTIONS

Q Résoudre $xy' = y + x$.

R On se place sur $]0, +\infty[$ puis $]-\infty, 0[$ pour se ramener à $y' - \frac{y}{x} = 1$.
Les solutions homogènes sont $y_0 : x \longmapsto C\,|x|$, puis par variation de la constante on obtient une solution particulière, d'où $y(x) = Cx + x\ln(|x|)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
On regarde ensuite si l'on peut raccorder (penser que la solution doit alors être $\mathcal{C}^1$!)

Q Considérons $y' = Ay$ pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 2. Montrer que les solutions restent dans un même plan.

R On admet qu'il existe une matrice B de rang 1 telle que $BA = 0$. On remarque alors que $B(\exp(At) - I) = 0$, donc $\mathrm{Im}(\exp(At) - \mathrm{Id}) \subset \ker(B)$ de dimension 2.
Si z est une solution avec $z(0) = z_0$, alors $z(t) = (\mathrm{e}^{At} - I)y_0 + y_0 \in \ker(B) + y_0$.

Q Soit f $\mathcal{C}^1$ et telle que $f' + af \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ avec $a > 0$. Montrer que $f, f' \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

R Si $\lambda = f' + af$, on a $\forall x, f(x) = f(0)\,\mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-ax}\int_0^x \mathrm{e}^{at}\,\lambda(t)dt$.
D'où $\left|\int_0^x \mathrm{e}^{at}\,\lambda(t)dt\right| \leq \|\lambda\|_\infty \int_0^x \mathrm{e}^{at}\,dt = \|\lambda\|_\infty\,(\mathrm{e}^{ax} - 1)$, donc f est bornée.
Puis $f'(x) = -af(0)\,\mathrm{e}^{-ax} - a\,\mathrm{e}^{-ax}\int_0^x \mathrm{e}^{at}\,\lambda(t)dt + \lambda(x)$ donc f' est également bornée.

BIBLIOGRAPHIE

[Ber17] F. BERTHELIN : *Équations différentielles*. Cassini, 2017.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.