220 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $X' = f(t, X)$. EXEMPLES D'ÉTUDE DES SOLUTIONS EN DIMENSION 1 ET 2.

I. Autour du théorème de Cauchy-Lipschitz
[Ber17] [QZ13, ChX, p353] [Gou08, Ch6, p353]

I. A. Définitions [Ber17, Ch1]

Équation différentielle, ordre, on se ramène à l'ordre 1 matriciellement
Solution maximale, globale (implique maximale, mais pas l'inverse)
Problème de Cauchy, solution d'un problème de Cauchy, exemple

I. B. Existence et unicité locale [Ber17, §3.2, p84]

Fonction localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable

Théorème 1. [Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas globalement lipschitzien)]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ continue, et globalement lipchitzienne par rapport à la seconde variable pour une norme $\|.\|$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$.
Alors il existe une unique solution y globale de $y' = f(t, y)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Problème linéaire, exemple, non linéaire, exemple

I. C. Durée de vie des solutions [Ber17, §3.8, p107]

Solution maximale non globale : exemple de $x' = x^2$
Théorème des bouts, cas où $O = \mathbb{K}^n$: solutions non bornées ou en temps infini
Lemme de Grönwall, cas où f est lipschitzienne : solution maximale définie sur I tout entier

II. Résolution des équations différentielles

II. A. Le cas linéaire [Ber17, Ch2, p25]

Équation linéaire, théorème de Cauchy-Lipschitz avec solutions globales
Structure de l'ensemble des solutions, base de solutions, wronskien, ensemble des solutions
Méthode de la variation de la constante, exemple d'une équation avec des solutions mêlant polynômes et exponentielles

II. B. Équations de Bernoulli, de Ricatti [Gou08, §6.3, p371] [Ber17, §4.2, p133]

Exemple des équations de Bernoulli et de Ricatti

II. C. Équations différentielles et séries entières
[QZ13, §X.VI, p408/435] [Gou08, p245]

Il est souvent judicieux de rechercher des solutions particulières d'équations différentielles sous forme de série entière, notamment lorsque les fonctions coefficients sont des polynômes.

Théorème 2. *Soient $p(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n\geq 0} q_n x^n$ convergeant pour $x \in]-R, R[$ où $R > 0$. Alors pour tout $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution y sur $]-R, R[$ de $y'' + py' + qy = 0$ avec $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$, y étant développable en série entière.*

Application 3. Calcul des solutions de $y'' + xy = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, de $(1 - x^2)y'' - xfy' = 2$ sur $]-1, 1[$ ou de $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$ sur $]0, 1[$.

III. Étude qualitative [Ber17, Ch5/6, p177–262] [QZ13, §X.IV, p380]

III. A. Définitions

Système autonome, les résultats de la première partie restent valables

III. B. Points d'équilibres et isoclines

Point d'équilibre, point stable, instable, asymptotiquement stable
Isocline $\to$ informations sur les champs de vecteurs tangents
Si $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x_\infty$ et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} y_\infty$, $f(x_\infty, y_\infty) = 0$.
Étude du système de Lokta-Volterra

III. C. Linéarisation [Ber17, §6.2, p239] [Rou99, §3.3, p127]

Stabilité du système linéaire en fonction des valeurs propres.
Noeuds, foyers, cols, …

Théorème 4. [Stabilité de Liapounov]
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Si les valeurs propres de $A = Df(0)$ sont toutes de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système $y' = f(y)$.

Exemples
Contre-exemple lorsque l'on n'a plus les hypothèses : il peut se passer n'importe quoi !

ANNEXE

Diagramme de stabilité des solutions
Portrait de phase du système de LOKTA-VOLTERRA
Schéma d'EULER

QUESTIONS

Q Si $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x_\infty$ et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} y_\infty$, montrer que $f(x_\infty, y_\infty) = 0$.

R Si ce n'est pas le cas, il existe t_1 tel que $|f(x(t), y(t))| \geq \mu > 0$ pour $t \geq t_1$. On a alors $x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^t x'(s)ds > x(t_1) + \mu(t - t_1) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Contradiction.

Q Calculer la moyenne de x sur une période du système de LOKTA-VOLTERRA.

R On a $\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{y'}{dy} + \frac{c}{d}dt = \frac{1}{T}\frac{c}{d}(T - 0) = \frac{c}{d}$.

Q Résoudre $x' = f(x)$ avec $f(x) = x\mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ et une condition initiale (t_0, x_0) quelconque.

R f est lipschitzienne donc admet une unique solution globale. On étudie ensuite selon la valeur de x_0, puis on fait les raccords, ...

Q Si $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est telle que $\langle f(y) \mid y - v\rangle \leq \alpha - \beta \|y\|^2$ pour un $v \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta > 0$, étudier la durée de vie des solutions de $y' = f(y)$.

R Il existe une unique solution globale à condition initiale fixée par le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Si (y, I) est une solution maximale, on a :

$$\langle y'(t) \mid y(t) - v\rangle \leq \alpha - \beta \|y(t)\|^2$$

On en déduit que $\langle y'(t) \mid y(t)\rangle \leq \alpha + \langle y'(t) \mid v\rangle - \beta \|y(t)\|^2$. Ainsi si $g : t \longmapsto \|y(t) - v\|^2$, on a $\frac{g'(t)}{2} \leq \alpha - \beta\frac{\|v\|^2}{2} - \beta\frac{g(t)}{2}$, d'où $\beta g(t) + g'(t) \leq 2\alpha + \beta \|x\|^2$ puis en appliquant le lemme de GRÖNWALL on vérifie que la durée de vie est infinie.
Autre possibilité : on trouver une boule assez grande telle que l'on ne sort pas de la boule.

Q Que dire de $x' = \cos(x + t^2)$?

R Les solutions existent, sont de durée de vie infinie car bornées en temps fini.

BIBLIOGRAPHIE

[Ber17] F. BERTHELIN : *Équations différentielles*. Cassini, 2017.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.