

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E .

I. Existence et unicité d'extremums

DÉFINITION 1. On dit que f admet un minimum (resp. maximum) local en $x_0 \in E$ s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V, f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $\forall x \in V, f(x) \leq f(x_0)$).

On dit que f admet un minimum (resp. maximum) global en $x_0 \in E$ si $\forall x \in E, f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $\forall x \in E, f(x) \leq f(x_0)$).

Un extremum de f est un maximum ou un minimum de f .

REMARQUE 2. Un extremum global est bien sur un extremum local.

EXEMPLE 3. $x \mapsto x^2$ admet un minimum global en 0. $\cos$ admet un maximum global en les $(2k\pi)_{k \in \mathbb{Z}}$. L'application $x \mapsto (x-1)x(x+1)$ admet un minimum local mais pas d'extremums.

I. A. Compacité et coercivité

[Gou08, §1.3, p31] [BMP05, §1.5, p26]

PROPOSITION 4. Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

APPLICATION 5. Soit K un compact de E , F un fermé de E , avec K et F disjoints. Alors $K \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$ atteint son minimum noté $d(K, F)$.

APPLICATION 6. Soit f une application définie sur un compact K et contractante. Alors f admet un unique point fixe.

DÉFINITION 7. On dit que f est coercive si $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

EXEMPLE 8. Une norme est coercive. Une forme linéaire ne l'est pas.

PROPOSITION 9. Si $E = \mathbb{R}^n$ et f est coercive et continue, alors f est minorée et atteint son minimum global.

I. B. Convexité

[BMP05, §1.5, p26]

DÉFINITION 10. [ENSEMBLE CONVEXE, FONCTION CONVEXE]

Un ensemble E est convexe si pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$, on a $tx + (1-t)y \in E$.

f est dite convexe si $\forall x, y \in E, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

f est dite strictement convexe si $\forall x, y \in E, \forall t \in]0, 1[, f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$.

THÉORÈME 11. En dimension finie, si f est convexe alors elle est continue.

EXEMPLE 12. Une norme sur E est convexe. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $f : x \mapsto \langle Ax \mid x \rangle$ est convexe si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et strictement convexe si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 13. Si f convexe admet un minimum local, alors c'est une minimum global. De plus l'ensemble des minima est convexe.

Si de plus f est strictement convexe, alors elle admet au plus un minimum, qui est alors global.

I. C. Dans les espaces de HILBERT

[Gou08, An.B, p407-416] [Bre99, ChV/VIII, p79-82/136] [BMP05, §3.1.2, p95-107]

Soit H un espace de HILBERT.

THÉORÈME 14. [PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ]

Soit C un convexe fermé de H . Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! p \in C \mid \|x - p\| = d(x, C)$$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant $\forall c \in C, \Re(\langle x - p \mid c - p \rangle) \leq 0$.

EXEMPLE 15. Si C n'est pas convexe : soit $H = \mathbb{R}$ et $C = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$. Alors 1 et -1 minimisent la distance de 0 à C .

COROLLAIRE 16. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . Alors $H = F \oplus F^\perp$.

APPLICATION 17. [THÉORÈME DE RIESZ-FRÉCHET]

Pour toute application $\phi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall v \in H, \phi(v) = \langle f \mid v \rangle$.

De plus $\phi \mapsto f$ est une isométrie ($\|f\|_H = \|\phi\|_{H'}$).

APPLICATION 18. Existence et unicité de l'adjoint d'un opérateur $T \in H'$.

THÉORÈME 19. [THÉORÈME DE LAX-MILGRAM]

Soit $a : H^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\ell \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall v \in H, a(u, v) = \ell(v)$.

Si de plus a est symétrique alors u est l'unique élément de H minimisant $v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$.

APPLICATION 20. [PROBLÈME DE DIRICHLET FAIBLE]

Soit $I =]0, 1[$ et $f \in L^2(I)$. Alors

$$\exists ! u \in H_0^1(I) \mid \forall v \in H_0^1(I), \int_I u' \cdot v' + \int_I uv = \int_I f v$$

De plus u minimise la fonction $v \mapsto \frac{1}{2} \int_I |v'|^2 + v^2 - \int_I f v$.

I. D. Holomorphie

[BMP05, §2.5.2, p72]

On se place sur $E = \mathbb{C}$ et on considère $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ où Ω est un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$.

THÉORÈME 21. [FORMULE DE LA MOYENNE]

Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Alors $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$.

THÉORÈME 22. [PRINCIPE DU MAXIMUM LOCAL]

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $\sup_{\Omega} |f|$ est atteint. Alors f est constante.

COROLLAIRE 23. Si f ne s'annule pas et $\inf_{\Omega} |f|$ est atteint, alors f est constante.

THÉORÈME 24. [PRINCIPE DU MAXIMUM GLOBAL]

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Alors $\max_{\Omega} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$ et s'il existe $z_0 \in \Omega$ réalisant le maximum, alors f est constante sur Ω .

APPLICATION 25. [THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS]

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine complexe.

APPLICATION 26. [LEMME DE SCHWARZ]

Soit $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe telle que $f(0) = 0$.

Alors $|f'(0)| \leq 1$ et $\forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, |f(z)| \leq |z|$.

De plus, si $|f'(0)| = 1$ ou s'il existe $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, tel que $|f(z)| = |z|$, alors f est une rotation.

II. Extrema et calcul différentiel

[BMP05, §1.3, p15]

II. A. Conditions du premier ordre et applications

[Gou08, §2.1/5.2, p71/315] [Rou99, p327]

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f définie sur U .

DÉFINITION 27. Si f est différentiable en $x_0 \in U$ et si $df(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un point critique de f .

PROPOSITION 28. Si x_0 est un extremum local de f et si f est différentiable en x_0 , alors x_0 est un point critique.

EXEMPLE 29. Attention ce n'est qu'une condition nécessaire : $x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum en 0.

EXEMPLE 30. Etude des extremums de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$: il n'y a pas de maximum local, et les seuls minimums locaux sont globaux et sont $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

THÉORÈME 31. [THÉORÈME DE ROLLE]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

APPLICATION 32. [THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

II. B. Conditions du second ordre

[Rou99, p327] [Gou08, §5.2, p315]

PROPOSITION 33. Soit $x_0 \in U$ un point critique de f . On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ en x_0 . Alors :

- (i) si x_0 est un minimum (resp. maximum) local, alors $d^2 f(x_0)$ est positive (resp. négative),
- (ii) si $d^2 f(x_0)$ est définie positive (resp. définie négative), alors x_0 est un minimum (resp. maximum) local.

EXEMPLE 34. Ce n'est pas une condition nécessaire : prendre $x \mapsto x^4$.

THÉORÈME 35. [LEMME DE MORSE]

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et $d^2 f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n - p)$.

Alors il existe un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\phi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \varphi(x)_1^2 + \dots + \varphi(x)_p^2 - \varphi(x)_{p+1}^2 - \dots - \varphi(x)_n^2$ au voisinage de 0.

APPLICATION 36. Soit x_0 un point critique de f tel que la hessienne de f est non dégénérée. Alors c'est un minimum (resp. maximum) local si et seulement si la hessienne est de signature $(n, 0)$ (resp. $(0, n)$).

De plus, si la hessienne est de signature $(p, n - p)$ pour $1 \leq p \leq n - 1$, alors on a des directions v pour lesquelles x_0 sera minimum local de $h \mapsto f(x + hv)$ et d'autres pour lesquelles x_0 sera maximum local.

EXEMPLE 37. [CAS $n = 2$] Soit x_0 un point critique de f telle que $D^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Alors

- si $rt - s^2 > 0$ et $r + t > 0$, x_0 est un minimum local,
- si $rt - s^2 > 0$ et $r + t < 0$, x_0 est un maximum local,
- si $rt - s^2 < 0$, x_0 n'est pas un extremum,
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

EXEMPLE 38. Pour le dernier cas, on peut considérer :

$$f(x, y) = x^4 \quad f(x, y) = -x^4 \quad f(x, y) = x^4 - y^4$$

II. C. Optimisation sous contraintes

[BMP05, §1, p20] [Gou08, §5.2/3, p317/327] [Rou99, Ch7, p380]

THÉORÈME 39. [THÉORÈME DES EXTREMA LIÉS]

Soit $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 définies sur U ouvert. Notons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_{\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ sont libres, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de LAGRANGE, tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$$

APPLICATION 40. Tout endomorphisme symétrique de E admet une valeur propre réelle.

APPLICATION 41. [INÉGALITÉ DE HADAMARD]

- (i) Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien (réel ou complexe). Alors $|\det((\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n})| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.
- (ii) Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Alors $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$.

Dans les deux points, on a égalité si et seulement si la famille $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.

III. Optimisation numérique

III. A. Méthode de NEWTON

[Rou99, Ch4, p140]

THÉORÈME 42.

Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 , où $c < d$, et telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c, d]$. On considère la suite récurrente définie par $x_0 \in [c, d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Alors en notant a l'unique 0 de f , on a :

- (i) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique : il existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$.
- (ii) si de plus $f'' > 0$ sur $[a, d]$, alors pour tout $x_0 \in]a, d]$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_n - a)^2$.

APPLICATION 43. Approximation des zéros d'un polynôme.

III. B. Méthode de descente

[FGN12, §1.21, p39–41]

THÉORÈME 44. [MÉTHODE DE GRADIENT À PAS OPTIMAL]

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ elliptique, c'est-à-dire f est C^1 et telle qu'il existe $\alpha > 0$ satisfaisant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y) | x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$$

On définit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$ où $\rho_n = \operatorname{argmin}_{\rho > 0} f(x_n - \rho \nabla f(x_n))$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique minimum global de f .

APPLICATION 45. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. L'application $f : x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax | x \rangle - \langle b | x \rangle$ admet un unique minimum $\bar{x}$ caractérisé par $\nabla f(\bar{x}) = A\bar{x} - b = 0$. On converge vers cette solution par l'algorithme de gradient à pas optimal.

III. C. Problème des moindres carrés

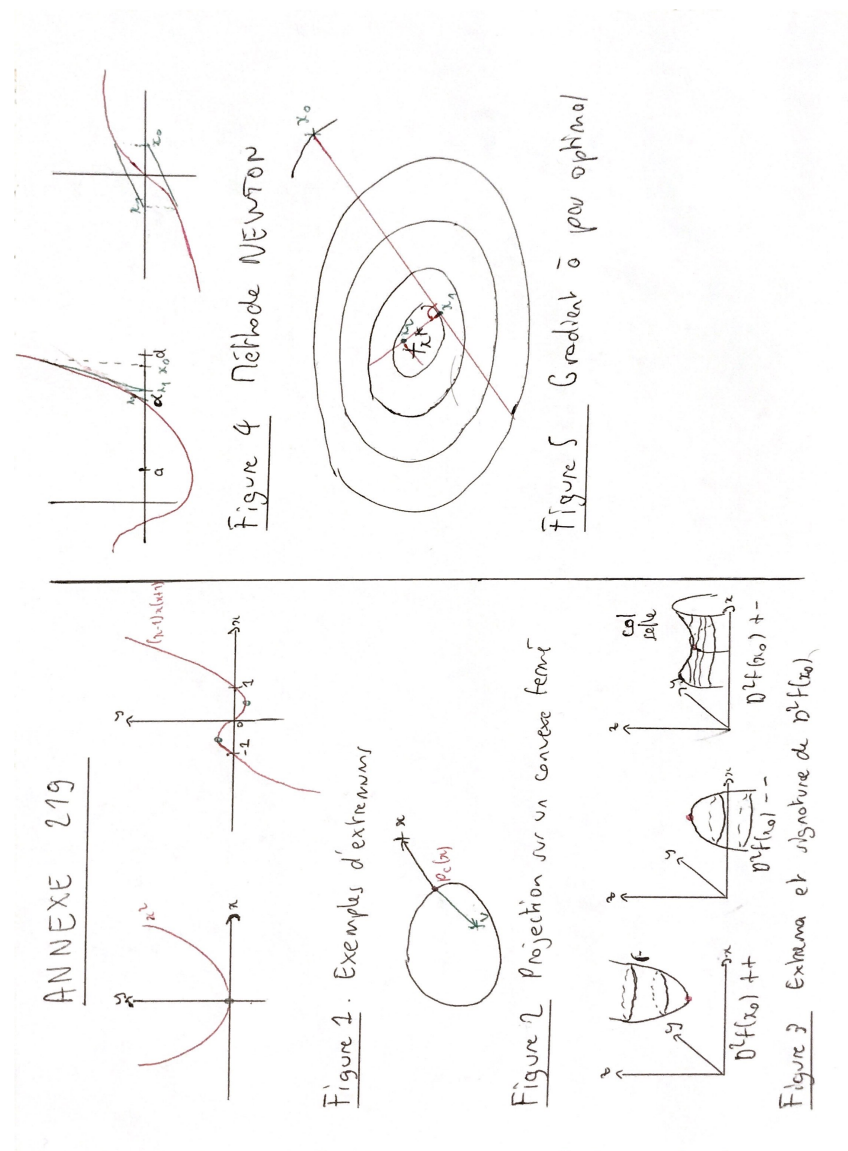
[AK02, Ch7, p135]

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche un vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|b - Ax\|_2 = \inf_{y \in \mathbb{R}^p} \|b - Ay\|_2$.

PROPOSITION 46.

- (i) Il existe toujours une solution au problème,
- (ii) x est solution si et seulement si $A^\top Ax = A^\top b$,
- (iii) Si $n \geq p$ et $\operatorname{rg}(A) = p$, $A^\top A$ est inversible et il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure, à diagonale positive, telle que $A^\top A = BB^\top$, et alors $x = (BB^\top)^{-1} A^\top b$ est une solution.

ANNEXE



SPEECH

La recherche d'extremums a de nombreuses applications dans divers domaines (informatique, économie, ...). Dans cette leçon on s'intéresse d'abord aux conditions d'existence et d'unicité, selon que l'on soit sur un compact, dans un espace de HILBERT, ... puis on fait ensuite le lien avec le calcul différentiel, notamment si f est définie sur $X \subset F$ espace vectoriel normé de dimension finie, les extrema sont à chercher parmi les points critiques, les points intérieurs à X où f n'est pas différentiable et les points non intérieurs à X (faire un schéma).

QUESTIONS

- Q Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $p \leq n$ et $b \in \mathbb{R}^n$. $x \mapsto \|Ax - b\|_2$ admet-elle un minimum ?
- R Posons $f : x \mapsto \|Ax - b\|_2^2$. Alors f est différentiable et $\nabla f(X) = A^T AX - A^T b$ s'annule si et seulement si $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ (car $A^T A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a même rang que A , donc est inversible¹). Ainsi $\|Ax - b\|_2 \geq \|(A^T A)^{-1} A^T b - b\|_2$ et ce minimum est atteint.
- Q Minimiser $X^T Y$ où $Y \in \mathbb{R}^n$ est fixé et $\sum_i x_i^2 \leq 1$.
- R On définit $f : X \mapsto X^T Y$ et $g : x \mapsto \|x\|_2^2 - 1$.
Montrons d'abord que si f est convexe sur C convexe, elle atteint son maximum sur ∂C . En effet, f est convexe donc est continue. Si $x^* = \operatorname{argmax}_C f \notin \partial C$, écrivons $x^* = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_i$ où $(x_i)_{1 \leq i \leq \ell} \in \partial C$ et $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$, les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ étant strictement positifs. Par convexité puis définition de x^* , $f(x^*) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i) \leq f(x^*)$ et donc $f(x_i) = f(x^*)$ pour $1 \leq i \leq \ell$. Dans notre problème, f est linéaire donc convexe, donc $\max_{\mathbb{B}(0,1)} f$ est atteint sur $\mathbb{S}(0,1)$. Sur la sphère, on a $\nabla g(X) = 2X \neq 0$, et $df(X)H = \langle H | Y \rangle$. Le théorème des extrema liés donne que si X est un extremum local il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $df(X) = \lambda dg(x)$, ce qui donne $\lambda = \pm 2 / \|Y\|_2$, puis $X^T \cdot Y = \pm \|Y\|_2$.
Remarque : on pouvait utiliser directement l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.
- Q Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que pour tout x , les valeurs propres de $d^2 f(x)$ sont dans $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha > 0$. Montrer que f a un unique minimum global.
- R On a $d^2 f(x)(h, h) \geq \alpha \|h\|^2$. On en déduit que $f(h) - f(0) - df(0)h \geq \frac{\alpha}{2} \|h\|^2$. Donc f est coercive. Elle atteint son unique minimum global. Pour le trouver, on peut utiliser l'algorithme de gradient à pas fixe. Quelle condition suffisante sur le pas τ faut-il pour avoir convergence ?
Posons $F(X) = X - \tau \nabla f(X)$. On a $dF(X)(H) = H - \tau H^T d^2 f(X) H$, donc $dF(X) = I - \tau \nabla^2 f(X)$. Comme $\|\nabla^2 f(X)\|_2 \leq \beta$, on a convergence si $\tau < \frac{1}{\beta}$.
En fait $\operatorname{Sp}(dF(X)) \subset [1 - \tau\beta, 1 - \tau\alpha]$ donc $\rho(dF(X)) \leq \max(|1 - \tau\beta|, 1 - \tau\alpha) < 1$ pour $\tau < \frac{2}{\beta}$.
- Q Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ qui ne s'annule pas. Soit $z = \min_{\Omega} |f|$. Montrer que $z \in \partial\Omega$.
- R $g = \frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$. On applique le principe du maximum à g , qui atteint ses bornes sur $\partial\Omega$, donc son minimum $z \in \partial\Omega$.

1. il est clair que $\ker(A) \subset \ker(A^T A)$. Réciproquement si $A^T A x = 0$, ...

BIBLIOGRAPHIE

- [AK02] G. ALLAIRE et S.-M. KABER : *Algèbre linéaire numérique*. Ellipses, 2002.
- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2^{ème} édition, 2005.
- [Bre99] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [FGN12] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS : *Oraux X-ENS - Analyse 4*. Cassini, 2012.
- [Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2^{ème} édition, 2008.
- [Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.