215 APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DÉFINIES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Autour de la différentiabilité [Rou99, Ch2, p39] [Gou08, §5.1, p303]

I. A. FRÉCHET-différentiabilité

Définition au sens de FRÉCHET, unicité, lien avec la dérivée sur $\mathbb{R}$
Cas d'une fonction linéaire, bilinéaire, constante, …
Propriétés de linéarité, de composition, de continuité
Classe $\mathcal{C}^1$, cas d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme
Différentielle du déterminant, d'une matrice puissance p, de l'inverse d'une matrice

I. B. Dérivées directionnelles et GATEAUX-différentiabilité

Définition, GATEAUX-différentiabilité
GATEAUX implique FRÉCHET, mais la réciproque est fausse ! $\to$ contre-exemple
Caractérisation : une fonction est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle admet des dérivées partielles en tout point de U qui sont continues sur U.
Gradient

I. C. Inégalités sur les applications différentiables [Rou99, Ch3, p93] [Gou08, §5.1 p303]

Inégalité de la moyenne, cas d'un ouvert convexe et f k-lipschitzienne
Théorème des accroissements finis. Applications

II. Différentielle d'ordre quelconque [Rou99, Ch6, p275]

Classe $\mathcal{C}^k$, théorème de SCHWARZ (contre-exemple lorsque la fonction n'est pas $\mathcal{C}^2$)
Formules de TAYLOR

III. Théorèmes d'inversion locale/globale et des fonctions implicites [Rou99, Ch5, p175] [Gou08, §5.3, p321]

TIL : on veut généraliser le fait que si f est $\mathcal{C}^1$ et monotone sur $I \subset \mathbb{R}$, alors f^{-1} est $\mathcal{C}^1$.
Définition d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme (local)
TIL (figure) : c'est une condition suffisante
Contre-exemple : $f(u) = u + u^2 \sin(\pi/u)$ est dérivable de dérivée non nulle mais f n'est pas localement injective en 0 car elle n'est pas $\mathcal{C}^1$.
Applications : $M \longmapsto M^p$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en I_n $\to$ existence d'une racine p-ième matricielle, $\exp$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en I_n
Exemple [Gou08, exo2, p238]
TIG, contre-exemple sans f injective [Rou99]
Application : changement de variables en coordonnées polaires, calcul de $\int_{\mathbb{R}} \exp -x^2 dx$
Interprétation du rôle du jacobien comme limite d'un volume, en utilisant le TIL
TFI
Exemple en dimension 2 [Gou08, p326]
Exemple : $f(h,x) = (x-a)(b-x) + hx^3$. Pour h suffisamment petit, on a trois zéros de f dont on donne un développement asymptotique
Paramétrage du cercle. Exemple d'application à la recherche de 0
Théorème : TFI et TIL sont équivalents

IV. Changement de coordonnées [Rou99, Ch5, p175]

Changement de coordonnées, application pour une EDP [Rou99, Ch5, Ex. 63]
Immersion, submersion, rang constant
Remarque : tout cela généralise le TIL

THÉORÈME 1. [LEMME DE MORSE]
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\phi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \varphi(x)_1^2 + \cdots + \varphi(x)_p^2 - \varphi(x)_{p+1}^2 - \cdots - \varphi(x)_n^2$ au voisinage de 0.

V. Application à la recherche d'extremums [Rou99, Ch5, p175] [Gou08, 5.2/3, p317/327]

Conditions nécessaires du premier/deuxième ordre, liens avec la signature de $d^2f(a)$ (lien avec le lemme de MORSE)

THÉORÈME 2. [THÉORÈME DES EXTREMA LIÉS]
Soit $f, g_1, \ldots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur U ouvert. Notons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $(dg_1(a), \ldots, dg_r(a))$ sont libres, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de LAGRANGE, tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$$

Application à la diagonalisation d'un endomorphisme symétrique en base orthonormée
Inégalité de HADAMARD
Sous-variétés : vers les extrema liés. Méthodes de gradient

ANNEXE

Interprétation des différents théorèmes (TIL, TFI). extrema …

COMMENTAIRES

Il n'est pas obligatoire de parler de sous-variétés.
Il faut expliquer les problèmes que l'on rencontre en dimension multiple : des caractérisations par les dérivées directionnelles ne suffisent pas car on peut approcher le point autrement qu'en suivant une droite ! L'objectif de la différentielle est de ne pas avoir besoin de regarder ce qu'il se passe coordonnée par coordonnée
Le théorème du rang constant permet de faire le lien avec les sous-variétés.

QUESTIONS

Q On pose $f(x,y) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}a(nx)b(ny)$ où a, b sont $\mathcal{C}^1$ bornées et de dérivées bornées. Montrer que f est différentiable.

R On montre que f converge normalement et donc est $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$. Ses dérivées partielles existent et sont bornées et continues ... on en déduit que f est $\mathcal{C}^1$.

Q Soit $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$. On considère $F : (r,\theta) \longrightarrow r f(\theta)$. F est-elle différentiable ?

R Si F est différentiable, on a $F(tr, \mathrm{e}^{i\theta}) = tr\,\mathrm{e}^{if(\theta)} = L(tr\,\mathrm{e}^{i\theta}) + o(t)$, donc $L(r\,\mathrm{e}^{if(\theta)}) = r\,\mathrm{e}^{if(\theta)}$ donc $L = F$ et F est linéaire.
Pour que F soit linéaire, on veut $F(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i\theta'}) = F(\mathrm{e}^{i\theta}) + F(\mathrm{e}^{i\theta'}) = \mathrm{e}^{if(\theta)} + \mathrm{e}^{if(\theta')}$. C'est vrai si f est une isométrie, c'est-à-dire si $f(\theta) = \pm\theta + \theta_0$ ($+$: rotations, $-$: symétrie).

Q $\varphi : A \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}\,A$ est-elle différentiable ? Si oui calculer sa différentielle.

R $\partial_{E_{ij}\varphi}(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}\,E_{ij}$ si $i \neq j$, $\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}(A + E_{ij})$ sinon.
Donc $d\varphi(A)(H) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}(H + \sum_i h_{ii} A)$.

Q Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Soit $g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que g est différentiable en a lorsque f est deux fois dérivable en a.

R On regarde les dérivées partielles pour intuiter la différentielle.
On peut introduire $\varphi(t) = f(t) - f(a) - (t-a)f'(a) - \frac{(t-a)^2}{2} f''(a)$.

BIBLIOGRAPHIE

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Rou99] F. Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.