213 ESPACES DE HILBERT. BASES HILBERTIENNES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Espaces préhilbertiens et de HILBERT

I. A. Généralités [HL09, Ch3, p84]

Produit scalaire, espace préhilbertien, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, H est alors normé
Identité du parallèlogramme

REMARQUE 1. Toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme dérive d'un produit scalaire et est donc une norme hilbertienne. C'est un critère pratique : $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\|.\|_\infty)$ n'est pas un espace préhilbertien par exemple.

DÉFINITION 2. H est un espace de HILBERT s'il est complet pour la norme induite.

EXEMPLE 3.

- $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire usuel, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{Tr}(\overline{B^\top})$, $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$
- Si $(H_n)_{n\in N}$ est une suite d'espaces de HILBERT, alors $H = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} H_n \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < +\infty\}$ est un espace de HILBERT pour le produit scalaire $\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n \mid y_n\rangle_{H_n}$.

Orthogonalité, exemples

I. B. Projection sur un convexe fermé et conséquences
[Gou08, An.B, p407–416] [Bre99, Ch5, p79–82] [BMP05, §3.1.2, p95–107]

On se place sur un espace de HILBERT H.

THÉORÈME 4. [PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ]
Soit C un convexe fermé d'un espace de HILBERT H. Alors :

$$\forall x \in H, \exists! p \in C \mid \|x-p\| = d(x,C)$$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant $\forall c \in C, \Re(\langle x-p \mid c-p\rangle) \leq 0$.

COROLLAIRE 5. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $H = F \oplus F^\perp$.*

THÉORÈME 6. [THÉORÈME DE RIESZ-FRÉCHET]
Soit H un espace de HILBERT. Alors pour toute application $\phi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall v \in H, \phi(v) = \langle f \mid v\rangle$.
De plus $\phi \longmapsto f$ est une isométrie ($\|f\|_H = \|\phi\|_{H'}$).

REMARQUE 7. On a en fait juste besoin de C complet et H préhilbertien dans le théorème de projection.

EXEMPLE 8. Contre-exemples :

- lorsque F n'est pas fermé : prendre $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et F l'ensemble des suites de H nulles à partir d'un certain rang. $F^\perp = \{0\}$ mais $E \neq F$,
- lorsque H est seulement un espace de BANACH : $E = (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$. Les points $\{(x,0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$ minimisent la distance de $(0,1)$ à $\mathrm{Vect}((1,0))$.

APPLICATION 9. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors il existe un unique opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$\forall x, y \in H, \langle T(x) \mid y\rangle = \langle x \mid U(y)\rangle$$

THÉORÈME 10. [THÉORÈME DE LAX-MILGRAM]
Soit $a : H^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\ell \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall v \in H, a(u,v) = \ell(v)$.
Si de plus a est symétrique alors u est l'unique élément de H minimisant $v \longmapsto \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$.

APPLICATION 11. [PROBLÈME DE DIRICHLET FAIBLE]
Soit $I =]0,1[$ et $f \in L^2(I)$. Alors

$$\exists! u \in H_0^1(I) \mid \forall v \in H_0^1(I), \int_I u'.v' + \int_I uv = \int_I fv$$

De plus u minimise la fonction $v \longmapsto \frac{1}{2}\int_I |v'|^2 + v^2 - \int_I fv$.

II. Bases hilbertiennes et convergence faible

II. A. Bases hilbertiennes [HL09, §3.4, p107] [BMP05, §3.1.4, p107]

Soit H un espace de HILBERT.
Somme/base hilbertienne, exemples
Critères de densité dans un espace de HILBERT. Théorème d'existence d'une base hilbertienne
Formules de PARSEVAL, exemple
Coordonnées hilbertiennes, convergence dans H de $\sum x_n e_n$ dès que $\sum |x_n|^2 < +\infty$
Un espace de dimension infinie est isomorphe à ℓ^2 si et seulement si il est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne

II. B. Convergence faible [HL09, §3.2, p99]

Définition de la convergence faible, par linéarité il suffit de le vérifier sur une base hilbertienne

Convergence forte implique faible, réciproque vraie si de plus $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|$
Exemples simples
La boule unité est faiblement compacte

III. Cas des espaces L^2

[BL07, ChVI, p149]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

PROPOSITION 12. *$L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de HILBERT pour le produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$ défini par $\langle f \mid g\rangle = \int_E f\overline{g}d\mu$.*

APPLICATION 13. Existence de l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire L^2.

III. A. L'espace $L^2(\mathbb{T})$

[Gou08, Ch4.5, p256–270] [QZ13, Ch4, p68–135] [BMP05, §3.3.3/3.3.4, p127]

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e_n = \mathrm{e}^{in\cdot}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On définit lorsque cela a un sens $\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ et $\|f\|_1 = \sqrt{\langle f \mid f\rangle}$.

PROPOSITION 14. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée.*

DÉFINITION 15. [COEFFICIENT DE FOURIER]
On définit lorsque cela a un sens $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt = \langle f \mid e_n\rangle$ le n-ième coefficient de FOURIER de f, où $n \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLE 16.

- Pour $f = \mathbb{1}_{]-a,a[}$ où $0 < a < \pi$, on a $c_n(f) = \begin{cases} a/\pi & \text{si } n = 0 \\ \sin(na)/n\pi & \text{sinon} \end{cases}$.
- Pour $f : x \longrightarrow 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, on a $c_n(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} & \text{sinon} \end{cases}$.

DÉFINITION 17. [SOMME PARTIELLES DE FOURIER, DE FEJÉR]
On appelle somme partielle de FOURIER d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la quantité $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$.
On appelle somme partielle de FEJÉR d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la quantité $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_N(f)$.

REMARQUE 18. On peut voir $S_N(f)$ comme la projection sur $\mathcal{P}_N = \mathrm{Vect}((e_n)_{-N\le n\le N})$.

DÉFINITION 19. [NOYAUX DE DIRICHLET, DE FEJÉR]
On appelle noyau de DIRICHLET à l'ordre $N \in \mathbb{N}$ la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$.
On appelle noyau de FEJÉR à l'ordre $N \in \mathbb{N}$ la fonction $K_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n = \sum_{n=-N}^{N}(1 - \frac{|n|}{N})e_n$.

PROPOSITION 20. *On a les propriétés suivantes :*

D1) $S_N(f) = f * D_N$,
D2) D_N *est pair et* $\|D_N\|_1 = 1$,
D3) $\forall x \in \mathbb{T}, D_N(x) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}$,

F1) $\sigma_N(f) = f * K_N$,
F2) $\|K_N\|_1 = 1$,
F3) $\forall x \in \mathbb{T}, K_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \geq 0$,
F4) $\forall \delta \in]0, \pi], \int_{\delta\le|t|\le\pi} K_N(t)dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

THÉORÈME 21. [THÉORÈME DE FEJÉR]

- *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout $N \geq 1$ et $\sigma_N(f) = f * K_N \underset{N\to+\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$.*
- *Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour un $p \in [1, +\infty[$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout $N \geq 1$ et $\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.*

REMARQUE 22. On peut retrouver le théorème de WEIERSTRASS à partir du premier résultat.

APPLICATION 23. $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}), f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective.

THÉORÈME 24. *$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$:*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n \qquad \text{et} \qquad \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

APPLICATION 25. [CALCULS DE SÉRIES]
On peut reprendre l'Exemple 41 pour calculer les normes des applications dans L^2 : pour $a \in [\![0, 2\pi]\!]$: $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi-a}{2}$ (première fonction) et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (deuxième fonction).
On peut aussi calculer classiquement $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

III. B. L'espace $L^2(\rho, I)$

[BMP05, §3.1.5, p110] [Dem96, §II.5, p51]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 26. Soit $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, strictement positive et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$. On dit alors que ρ est une fonction de poids.

DÉFINITION 27. On définit $L^2(I,\rho) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_I |f(x)|^2 \rho(x)dx < +\infty \right\}$.

PROPOSITION 28. *$L^2(I,\rho)$ est un espace de HILBERT pour le produit du scalaire $\langle f \mid g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$.*

PROPOSITION 29. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux pour $\langle . \mid .\rangle_\rho$ et tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout n.*

EXEMPLE 30. Voir les dessins en annexe :

- Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho : x \longmapsto e^{-x^2}$, les $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes de HERMITE,
- Pour $I = [-1,1]$ et $\rho : x \longmapsto 1$, les $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes de LEGENDRE.

THÉORÈME 31. [BASE HILBERTIENNE DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX]
Soit ρ une fonction de poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)dx < +\infty$, alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

EXEMPLE 32. Sans l'hypothèse on a le contre-exemple suivant : soit la fonction de poids $w : x \longmapsto x^{-\ln(x)}$ sur $I = \mathbb{R}_+$. Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne forme pas une base de $L^2(I,w)$.

APPLICATION 33. Si I est borné, on a donc nécessairement une base hilbertienne.
La famille $(P_n \exp(-.^2/2))_n$, pour $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les polynômes de HERMITE, est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

ANNEXE

Théorème de projection sur un convexe fermé
Polynômes orthogonaux

QUESTIONS

Q Soient A, B des convexes fermés disjoints d'un espace de HILBERT réel. On suppos A compact. Montrer qu'il existe un hyperplan affine G séparant A et B, c'est-à-dire $H \setminus G$ a deux composantes connexes, dont l'une contient A et l'autre B.

R Considérons $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto d(x,B)$. On a $d(A,B) = \min(\varphi) > 0$.
Soit $a \in A$ atteignant la distance et $b = p_B(a)$. Soit $\psi : x \longmapsto \langle b-a \mid x\rangle$. Montrons que $\psi(A) < 0$ et $\psi(B) > 0$.
Si $x \in A$, on a $\langle x-a \mid b-a\rangle \leq 0$ et si $y \in B$, on a $\langle y-b \mid a-b\rangle < 0$ et donc $\psi(y) > \langle b \mid a-b\rangle$
…

BIBLIOGRAPHIE

[BL07] P. BARBE et M. LEDOUX : *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Bre99] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.

[Dem96] J.-P. DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences, 1996.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE : *Eléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.