214 THÉORÈME D'INVERSION LOCALE, THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES. EXEMPLES ET APPLICATIONS EN ANALYSE ET EN GÉOMÉTRIE.

I. Théorèmes d'inversion

[Rou99, Ch5, p175] [Gou08, §5.3, p321]

TIL : on veut généraliser le fait que si f est $\mathcal{C}^1$ et monotone alors f^{-1} est $\mathcal{C}^1$
Définition d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme (local)
Théorème d'inversion locale (figure) : c'est une condition suffisante
Contre-exemple : $f(u) = u + u^2 \sin(\pi/u)$ est dérivable de dérivée non nulle mais f n'est pas localement injective en 0 car elle n'est pas $\mathcal{C}^1$
Applications : $M \longmapsto M^p$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en I_n $\rightarrow$ existence d'une racine p-ième matricielle, $\exp$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en I_n
Exemple [Gou08, exo2, p238]
Théorème d'inversion globale
Contre exemple sans f injective [Rou99]
Application : changement de variables en coordonnées polaires, calcul de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$
Interprétation du rôle du jacobien comme limite d'un volume, en utilisant le TIL

II. Théorème des fonctions implicites

[Rou99, Ch5, p175] [Gou08, §5.3, p321]

TFI
Exemple en dimension 2 [Gou08, p326]
Exemple : $f(h, x) = (x - a)(b - x) + hx^3$. Pour h suffisamment petit, on a trois zéros de f dont on donne un développement asymptotique
Paramètrage du cercle. Exemple d'application à la recherche de 0
Théorème : TFI et TIL sont équivalents

> **THÉORÈME 1. [THÉORÈME DES EXTREMA LIÉS]**
> *Soit $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur U ouvert. Notons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ sont libres, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de* LAGRANGE, *tels que*
> $$df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$$

Application à la diagonalisation d'un endomorphisme symétrique en base orthonormée

III. Changement de coordonnées

[Rou99, Ch5, p175]

Changement de coordonnées, application pour une EDP [Rou99, Ch5, Ex. 63]
Immersion, submersion, rang constant
Remarque : tout cela généralise le TIL

> **THÉORÈME. [LEMME DE MORSE]**
> *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et $d^2 f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n - p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\phi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \varphi(x)_1^2 + \cdots + \varphi(x)_p^2 - \varphi(x)_{p+1}^2 - \cdots - \varphi(x)_n^2$ au voisinage de 0.*

IV. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

[Rou99]

Sous-variétés, exemples, vecteurs tangents,
Exemples : ouvert de $\mathbb{R}^n$, espace discret, sphère
interprétation géométrique des extrema liés

ANNEXE

Dessins des différents théorèmes et de quelques exemples

COMMENTAIRES

Intérêt du TIL est de résoudre l'équation $y = f(x)$! Celui du TFI est de trouver une paramétrisation de $f(x, y) = 0$ au voisinage d'un point annulateur. Faire un dessin pendant le speech ! Le [Rou99, Ch5] est bien adapté mais manque de certaines preuves.

QUESTIONS

Q Résoudre $X^3 + X^2 - X = A$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

R On pose $f(X) = X^3 + X^2 - X$. f est différentiable et

$$df(X)H = X^2H + XHX + HX^2/XH + HX - H$$

Donc $df(I_n)H = 4H$. Sur un voisinage de I_n et A suffisamment proche de I_n, on a $X = f^{-1}(A)$.

Q Calculer la différentielle de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto X^3$.

R Soit on fait le calcul à la main, soit on introduit l'application trilinéaire $(X, Y, Z) \longmapsto XYZ$.

Q Soit $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ injective sur son image et $\mathcal{C}^1$. Son image est-elle une sous-variété ?

R Pas forcément ! Penser au lasso.

BIBLIOGRAPHIE

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Rou99] F. Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.