

209 APPROXIMATION D'UNE FONCTION PAR DES POLYNÔMES ET DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Approximation par des polynômes

[Gou08, §2.1/4.4, p75/236–256]

I. A. Approximation locale de fonctions régulières

THÉORÈME 1. [FORMULE DE TAYLOR-YOUNG]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^n définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E . Alors pour $a \in I$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$$

EXEMPLE 2. On a les développements limités suivants, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

THÉORÈME 3. [FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}$ -espace de BANACH E . Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

THÉORÈME 4. [THÉORÈME DE BERNSTEIN]

Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que pour tout entier k , $f^{(2k)} \geq 0$ sur $] -a, a[$. Alors f admet un développement en série entière sur $] -a, a[$.

I. B. Densité dans l'espace des fonctions continues

[QZ13, §XIII.II.1, p518–519]

THÉORÈME 5. [THÉORÈME DE WEIERSTRASS]

$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}, \|\cdot\|_\infty)$ pour $a < b \in \mathbb{R}$.

REMARQUE 6. On a le théorème de STONE-WEIERSTRASS : soient (X, d) un compact non vide et H une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et unitaire. Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. On retrouve ce résultat mais aussi la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

APPLICATION 7. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0$. Alors f est nulle.

APPLICATION 8. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle $\int_{\mathbb{R}_+} f(t) dt$ existe et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt = 0$. Alors f est nulle.

EXEMPLE 9. Ce résultat n'est plus vrai si l'intervalle n'est pas borné ! En effet si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes alors f est un polynôme.

I. C. Densité dans L^2

[BMP05, §3.1.5, p110] [Dem96, §II.5, p51]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 10. Soit $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, strictement positive et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$. On dit alors que ρ est une fonction de poids.

DÉFINITION 11. On définit $L^2(I, \rho) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx < +\infty \right\}$.

PROPOSITION 12. $L^2(I, \rho)$ est un espace de HILBERT pour le produit du scalaire $\langle f \mid g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$.

PROPOSITION 13. Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_\rho$ et tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout n .

EXEMPLE 14. Voir les dessins en annexe :

- Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho : x \mapsto e^{-x^2}$, les $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les polynômes de HERMITE,
- Pour $I = [-1, 1]$ et $\rho : x \mapsto 1$, les $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les polynômes de LEGENDRE.

THÉORÈME 15. [BASE HILBERTIENNE DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX]

S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$, alors la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

APPLICATION 16. Si I est borné, on a donc nécessairement une base hilbertienne. La famille $(P_n \exp(-.^2/2))_n$, pour $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les polynômes de HERMITE, est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

EXEMPLE 17. Contre-exemple si la condition du théorème n'est pas vérifiée : considérer $I = \mathbb{R}_+$, $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$ et $f : x \mapsto \sin(2\pi \ln(x))$.

II. Interpolation polynômiale

II. A. Interpolation de LAGRANGE et erreur d'interpolation [Dem96, ChII, p21]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ des points deux à deux distincts de $[a, b]$.

THÉORÈME 18. Il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. P_n est appelé polynôme d'interpolation de LAGRANGE associé à f et à $(x_i)_i$. On a $P_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i$ où $\ell_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

THÉORÈME 19. Supposons f $(n+1)$ fois dérivable. Alors pour $x \in [a, b]$, il existe $\zeta_x \in [a, b]$ tel que $f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)$ où $\Pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n x - x_j$. Ainsi :

$$\|f - P_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\Pi_{n+1}\|_{\infty} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$$

EXEMPLE 20. La précision des polynômes interpolateurs provient alors du contrôle de $\|\Pi_{n+1}\|_{\infty}$, c'est-à-dire de la répartition des points. Dans le cas de points équidistants $(x_i = x_0 + ih)$, on a :

$$|f - P_n| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1} \max_{0 \leq i \leq n} |f^{(n+1)}(x_i)| \quad \text{et} \quad \|\Pi_{n+1}\|_{\infty} = O\left(\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}\right)$$

APPLICATION 21. [PHÉNOMÈNE DE RUNGE]

Soit $f : x \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$ sur $[-1, 1]$. C'est une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ mais dont les dérivées augmentent rapidement en norme infinie vers 0. Il s'en suit dans le cas de points équidistants que $\frac{1}{(n+1)!} \|\Pi_{n+1}\|_{\infty} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On observe alors (voir annexe) que les polynômes d'interpolation ne convergent pas uniformément vers f .

DÉFINITION 22. [POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV]

On définit par récurrence la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par $T_0 = 1, T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. On vérifie alors que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 23. Les racines de T_{n+1} sont les $(\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi))_{0 \leq k \leq n}$, appelés points d'interpolation de TCHEBYCHEV.

EXEMPLE 24. Prenant les points d'interpolation de TCHEBYCHEV (avec $[a, b] = [0, 1]$), on a :

$$\|\Pi_{n+1}\|_{\infty} = O\left(\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $(e/4)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on obtient que les polynômes d'interpolation de TCHEBYCHEV sont beaucoup plus précis que ceux associés à des points équidistants.

APPLICATION 25. Le phénomène de RUNGE n'est plus observé avec les polynômes d'interpolation de TCHEBYCHEV.

II. B. Application aux méthodes de quadrature [Dem96, ChIII, p59]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche des formules pour approcher $I(f) = \int_a^b f(t)dt$. Fixons $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$. On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$.

DÉFINITION 26. [MÉTHODE DE QUADRATURE]

Une méthode de quadrature consiste, pour $0 \leq i \leq n-1$ à approcher $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f$ par $A_i(f) = h_i \sum_{j=0}^{\ell_j} \omega_{ij} f(\zeta_{ij})$ où les $(\zeta_{ij})_j$ sont dans $[x_i, x_{i+1}]$ et les $(\omega_{ij})_{0 \leq j \leq n}$ sont des réels fixés tels que $\sum_j \omega_{ij} = 1$.

On note alors $E(f) = I(f) - \sum_{i=0}^{n-1} A_i(f)$ l'erreur de la méthode.

DÉFINITION 27. [MÉTHODE DE QUADRATURE]

On dit qu'une méthode de quadrature est d'ordre N si elle est exacte ($E(f) = 0$) pour tout $f \in \mathbb{R}_N[X]$ et s'il existe $f \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$ telle qu'elle soit inexacte.

APPLICATION 28. Fixant $(\zeta_j)_j$ associés à une subdivision de $[x_i, x_{i+1}]$, on peut prendre pour fonction de poids $\omega_j = \frac{1}{h_i} \int_{x_i, x_{i+1}} \ell_j$ où $\ell_j = \prod_{k \neq j} \frac{x - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k}$: ce sont les méthodes par interpolation de LAGRANGE.

(i) [MÉTHODE DES RECTANGLES]

On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{n-1} h_i f(z_i)$ où $(z_i)_i = (x_i)_i$ ou $(x_{i+1})_i$. Méthode d'ordre 0.

(ii) [MÉTHODE DES POINTS MILIEUX]

De même avec $(z_i)_i = (\frac{x_{i+1} + x_i}{2})_i$. Méthode d'ordre 1 et $E(f) \leq \frac{1}{3} \|f''\|_{\infty}$ si f est $\mathcal{C}^2$.

(iii) [MÉTHODE DES TRAPÈZES]

On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{n-1} h_i \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}$. Méthode d'ordre 1 et $E(f) \leq \frac{2}{3} \|f''\|_{\infty}$ si f est $\mathcal{C}^2$.

(iv) [MÉTHODE DE SIMPSON]

On approxime $I(f)$ par $\sum_{i=0}^{n-1} h_i \frac{f(x_{i+1}) + 4f(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}) + f(x_i)}{6}$. Méthode d'ordre 3 et $E(f) = O(\|f^{(4)}\|_{\infty})$ si f est $\mathcal{C}^4$.

EXEMPLE 29. Approximation de $\int_0^{\pi} \cos^2(x)dx = \frac{\pi}{4}$:

- (i) méthode des rectangles (à gauche ou à droite) : π ,
- (ii) méthode des points milieux : 0,
- (iii) méthode des trapèzes : π ,
- (iv) méthode de SIMPSON : $\frac{\pi}{3}$.

III. Approximation de fonctions périodiques

[Gou08, Ch4.5, p256–270] [QZ13, Ch4, p68–135] [BMP05, §3.3.3/3.3.4, p127]

III. A. Polynômes trigonométriques et séries de FOURIER

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e_n = e^{in\cdot}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On définit lorsque cela a un sens $\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$ et $\|f\|_1 = \sqrt{\langle f | f \rangle}$.

DÉFINITION 30. [POLYNÔME, SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE]

On appelle polynôme trigonométrique une combinaison linéaire finie des $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

On appelle série trigonométrique une combinaison linéaire des $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Une série trigonométrique converge-t-elle ? Ponctuellement, uniformément, dans L^p ? ...

DÉFINITION 31. [COEFFICIENT ET SÉRIE DE FOURIER]

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \langle f | e_n \rangle$ le n -ième coefficient de FOURIER de f , où $n \in \mathbb{Z}$. On définit la série de FOURIER associée à f comme la série trigonométrique $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$.

EXEMPLE 32.

- Pour $f = \mathbb{1}_{]-a,a[}$ où $0 < a < \pi$, on a $c_n(f) = \begin{cases} a/\pi & \text{si } n = 0 \\ \sin(na)/n\pi & \text{sinon} \end{cases}$.
- Pour $f : x \rightarrow 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, on a $c_n(f) = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$ si $n \neq 0$, 1 sinon.

PROPOSITION 33. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a :

- (i) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$,
- (ii) $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$,
- (iii) $f * e_n = c_n(f) e_n$,
- (iv) si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}_{pm}^1(\mathbb{T})$, $c_n(f') = i n c_n(f)$.

LEMME 34. [LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE]

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

III. B. Convergences au sens de CESÀRO

DÉFINITION 35. [SOMME PARTIELLES DE FOURIER, DE FEJÉR]

On appelle somme partielle de FOURIER d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la quantité $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$.

On appelle somme partielle de FEJÉR d'ordre $N \in \mathbb{N}$ la quantité $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_N(f)$.

REMARQUE 36. On peut voir $S_N(f)$ comme la projection sur $\mathcal{P}_N = \text{Vect}((e_n)_{-N \leq n \leq N})$.

DÉFINITION 37. [NOYAUX DE DIRICHLET, DE FEJÉR]

Le noyau de DIRICHLET d'ordre $N \in \mathbb{N}$ est la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$.

Le noyau de FEJÉR d'ordre $N \in \mathbb{N}$ est la fonction $K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n = \sum_{n=-N}^N (1 - \frac{|n|}{N}) e_n$.

PROPOSITION 38. On a les propriétés suivantes :

- D1) $S_N(f) = f * D_N$,
- D2) D_N est pair et $\|D_N\|_1 = 1$,
- D3) $\forall x \in \mathbb{T}, D_N(x) = \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}x)}{\sin(x/2)}$,
- F1) $\sigma_N(f) = f * K_N$,
- F2) $\|K_N\|_1 = 1$,
- F3) $\forall x \in \mathbb{T}, K_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \geq 0$,
- F4) $\forall \delta \in]0, \pi]$, $\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

THÉORÈME 39. [THÉORÈME DE FEJÉR]

- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout $N \geq 1$ et $\sigma_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f$.
- Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour un $p \in [1, +\infty[$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout $N \geq 1$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.

REMARQUE 40. On peut retrouver le théorème de WEIERSTRASS à partir du premier résultat.

APPLICATION 41. $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est injective.

III. C. Convergence en moyenne quadratique

THÉORÈME 42. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

APPLICATION 43. [CALCULS DE SÉRIES]

On peut reprendre l'Exemple 41 pour calculer les normes des applications dans L^2 : pour $a \in]0, 2\pi]$: $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi-a}{2}$ (première fonction) et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (deuxième fonction).

On peut aussi calculer $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

THÉORÈME 44. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}_{pm}^1(\mathbb{T})$, alors $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge normalement vers f .

EXEMPLE 45. Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $(S_N(f)(0))_{N \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

ANNEXE

Polynômes de HERMITE et de LEGENDRE.

Illustration des différentes méthodes numériques.

SPEECH

Il y a plusieurs types de convergences (écrire au tableau) : ponctuelle, uniforme, au sens de CESÀRO, quadratique (associée à la norme L^2). On va essayer de montrer des résultats pour chaque type de convergence et de faire des liens entre eux.

QUESTIONS

Q Trouver un espace de suites sur lequel la transformée de FOURIER $\mathcal{F}$ est surjective.

R Soit $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}$.

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on sait par lemme de RIEMANN-LEBESGUE, que $c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc l'application est bien définie. Est-elle surjective?

Vérifions que $(\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_{\infty})$ est complet. On a $(\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_{\infty}) \subset (\mathbb{C}_b^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_{\infty})$ complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de CAUCHY. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Soit $((u_n^k)_k)_n$ une suite de $\mathbb{C}_0(\mathbb{Z})$ convergent vers $(u_n)_n$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n^k$. Cette limite vaut-elle 0? Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $|u_N| \leq |u_N - u_N^k| + |u_N^k| \leq \|u - u^k\|_{\infty} + |u_N^k|$. Donc $\limsup_N |u_N| \leq \|u - u^k\|_{\infty}$ pour tout k , donc $\lim_N u_N = 0$.

Si $\mathcal{F}$ est surjective, elle est bijective, linéaire et continue de $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_{\infty})$. Par un corollaire du théorème de BANACH-STEINHAUS, $\mathcal{F}^{-1}$ serait continue, donc il existerait C telle que $\|\cdot\|_{L^1} \leq C \|\mathcal{F}(\cdot)\|_{\infty}$ sur $L^1(\mathbb{T})$. On vérifie que ce n'est pas possible.

Q Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. $\{f * g \mid g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})\}$ est-il dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ pour $\|\cdot\|_2$?

R Montrons que $e_m = e^{im}$ n'est pas dans l'adhérence en supposant $c_m(f) = 0$.

S'il existe $(g_n)_n$ telle que $f * g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_m$, alors $c_m(f * g_n) = c_m(f)c_m(g_n) = 0$ pour tout n , alors que $c_m(e_m) = 1$, ce qui donne une contradiction.

Par ailleurs, si $c_k(f) \neq 0$ pour tout k , montrons que l'ensemble est dense. Soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

On voudrait trouver $(g_n)_n$ telle que $c_k(g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{c_k(h)}{c_k(f)}$ pour tout k . Posons $g_n =$

$\sum_{k=-n}^n \frac{c_k(h)}{c_k(f)} e_k$. Alors par l'égalité de PARSEVAL :

$$\|f * g_n - h\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f * g_n - h)|^2$$

On calcule $|c_k(f * g_n - h)| = 0$ pour $n \geq k$, et $c_k(h)$ pour $n < k$, donc $\|f * g_n - h\|_2^2 =$

$\sum_{|k| > n} |c_k(h)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en tant que reste d'une série convergente.

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2^{ème} édition, 2005.

[Dem96] J.-P. DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences, 1996.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2^{ème} édition, 2008.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4^{ème} édition, 2013.