208 ESPACES VECTORIELS NORMÉS, APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES. EXEMPLES.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I. Généralités sur les espaces vectoriels normés [Gou08, §1.5, p47–48]

DÉFINITION 1. [NORME]
On appelle norme sur E une application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :
- pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\|\lambda.x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
- pour tout $x, y \in E$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Lorsque E est muni d'une norme, on parle d'espace vectoriel normé.

EXEMPLE 2.
1. **[SUR $\mathbb{K}^n$]** pour $p \in [1, +\infty[$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ et $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
2. **[SUR $\mathbb{K}[X]$]** Généralisation à $\mathbb{K}[X] \simeq \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.
3. **[SUR $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{K})$]** $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$ **[SUR $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$]** $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$.

On suppose dans la suite E muni d'une norme $\|.\|_E$.

PROPOSITION 3. *E est métrique pour la distance $d : (x, y) \longmapsto \|y - x\|_E$.*

DÉFINITION 4. [NORMES ÉQUIVALENTES]
Soit N_1, N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est plus fine que N_2 s'il existe $C > 0$ tel que $N_2 \leq C N_1$ sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si chacune est plus fine que l'autre.

REMARQUE 5. N_1 et N_2 définissent alors la même topologie, et leurs distances induites sont équivalentes.

EXEMPLE 6. Sur $\mathbb{K}^n$, la famille $\{\|.\|_p\}_{1 \leq p \leq \infty}$ est une famille de normes équivalentes.

II. Continuité des applications linéaires [Gou08, §1.5, p48–50]

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E,F)$ les applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}_c(E,F)$ son sous-ensemble d'applications continues. On note $\mathcal{L}(E \times F, G)$ les applications bilinéaires de $E \times F$ dans G.

THÉORÈME 7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors on a équivalence :*
(i) f est continue sur E,
(ii) f est continue en 0,
(iii) f est bornée sur la boule ou la sphère unité de E,
(iv) il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$,
(v) f est lipschitzienne sur E.

EXEMPLE 8. L'application $\begin{array}{ccc} E = \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{K}) & \longrightarrow & F = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est linéaire.
Si $\|f\|_F = \|f\|_\infty$, elle est continue pour $\|f\|_E = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ mais pas pour $\|f\|_E = \|f\|_\infty$.

DÉFINITION 9. [NORME SUBORDONNÉE]
On définit $|||f||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$ pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On l'appelle la norme subordonnée à $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.

PROPOSITION 10. *$|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.*
De plus, pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$, on a $|||g \circ f|||_{E,G} \leq |||f|||_{E,F} \, |||g|||_{F,G}$.

EXEMPLE 11. Pour $E = F = \mathbb{K}^n$, on définit des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: [AK02, §3.1, p54]
- $|||A|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ est la norme subordonnée associée à $\|.\|_E = \|.\|_\infty$.
- $|||A|||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$ est la norme subordonnée associée à $\|.\|_E = \|.\|_1$.

On a $|||\mathrm{Tr}||| = n$ pour $E = F = (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), |||.|||_\infty)$.

PROPOSITION 12. *Soit $f \in \mathcal{L}_2(E \times F, G)$ [a]. Alors on a équivalence :*
- *f est continue sur $E \times F$,*
- *f est continue en $(0,0)$,*
- *il existe $M > 0$ tel que $\forall (x,y) \in E \times F$, $\|f(x,y)\|_G \leq M \|x\|_E \|y\|_F$.*

a. ensemble des applications $E \times F \longrightarrow G$ bilinéaires

EXEMPLE 13. Un produit scalaire est une forme bilinéaire continue.
Soit $E = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|.\|_\infty)$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & (n x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

n'est pas continue.

III. Espaces vectoriels normés de dimension finie

[Gou08, §1.5, p50/56] [Hau07, §17.6-7, p321–322]

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe de dimension quelconque (on suppose la notion de norme connue).

Proposition 14. *La sphère unité de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ est compacte.*

Théorème 15. *Si E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Exemple 16. Contre-exemple en dimension infinie : $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
Contre-exemple sur $\mathbb{Q}$ non complet : $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $N_1(a+b\sqrt{2}) = |a|+|b|$ et $N_2 = |.|$.

Corollaire 17. *Si E est de dimension finie, les compacts de E sont les fermés bornés.*

Exemple 18. C'est faux en dimension infinie : prendre $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty)$ et considérer $(f_n = \mathbb{1}_{[0,1/n]}) \in \overline{\mathbb{B}(0,1)}^{\mathbb{N}}$.

Corollaire 19. *Si E est de dimension finie, E est complet.*

Corollaire 20. *Un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie est fermé.*

Corollaire 21. *Si E et de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$.*

Exemple 22. Contre-exemple en dimension infinie : $f \longmapsto f(0)$ sur $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K}), \|.\|_1)$, ou $P \longmapsto P'$ sur $(\mathbb{K}[X], \|.\|_\infty)$.

Théorème 23. [Théorème de Riesz]
E est de dimension finie si et seulement si $\overline{\mathbb{B}_E(0,1)}$ est compacte.

IV. Propriétés des espaces de Banach

IV. A. Généralités

[Gou08, §1.5, p52]

Définition 24. [Espace et algèbre de Banach]
Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. Une algèbre A est une algèbre de Banach si elle est munie d'une norme sous-multiplicative (c'est-à-dire $\forall x, y \in A, \|x.y\| \leq \|x\|\,\|y\|$).

Exemple 25.
- $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ sont des espaces de Banach,
- Si F est un espace de Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ est une algèbre de Banach.
- $\mathbb{K}[X]$ n'est complet pour aucune norme (considérer $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{\|X^k\|(1+k^2)}$).

Proposition 26. *Un espace vectoriel normé est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Corollaire 27. *Soit A une algèbre de Banach.*
- *Si $\|x\| \leq 1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ est inversible, d'inverse $1-x$.*
- *L'ensemble des inversibles de A est un ouvert.*

Théorème 28. [Complété d'un espace métrique]
Il existe un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$ et une isométrie $i : (X,d) \longrightarrow (\hat{X}, \hat{d})$ d'image dense. De plus, si $(\hat{X}', \hat{d}')$ et i' convient également, alors il existe une isométrie bijective $\varphi : \hat{X} \longrightarrow \hat{X}'$ telle que $\phi \circ i = i'$.

Exemple 29.
- $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pour la distance usuelle (on construit en fait $\mathbb{R}$ comme étant le complété de $\mathbb{Q}$),
- $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{C}([0,1])$ pour la norme uniforme, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ **[Théorème de Weierstrass]**.
- Pour la norme $p < +\infty$: $\mathcal{C}(\widehat{[0,1]},\mathbb{K}) = L^p([0,1])$, $\mathcal{C}(\widehat{[0,1]},\mathbb{K}) = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$.

IV. B. Théorème de Baire et conséquences

[Gou08, An.A, p397–406] [Rud98, Ch5, p125] [Bre99, Ch2, p15–21]

Théorème 30. [Théorème de Baire]
Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses d'un espace complet E, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ l'est aussi.

Application 31. Un espace de Banach est de dimension finie ou non dénombrable.

Théorème 32. [Théorème de Banach-Steinhaus]
Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}_c(E,F)$ simplement bornée (c'est-à-dire $\forall x \in E, \sup_{i\in I} \|u_i(x)\| \leq +\infty$). Alors $\sup_{i\in I} |||u_i||| < +\infty$.

Application 33. Existence d'une fonction continue 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

Application 34. Soient E, E_1 des espaces de Banach et E_2, F des espaces vectoriels normés.
- Soit $f : E \longrightarrow F$ limite simple d'une famille d'applications de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Alors $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$.
- Soit $B : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ une application bilinéaire telle que les applications partielles soient continues. Alors $B \in \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)$.

Théorème 35. [Théorème de l'application ouverte]
Une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach est ouverte.

Corollaire 36. *Une application linéaire continue bijective entre espaces de Banach est d'inverse continue.*

Application 37. $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe. C'est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E, \circ)$.

Application 38. Si un espace de Banach est muni de 2 normes dont l'une est plus fine que l'autre, alors elles sont équivalentes.

Corollaire 39. [Théorème du graphe fermé]
Une application linéaire $T : E \longrightarrow F$ entre deux espaces de Banach est continue si et seulement si son graphe ($\{(x, T(x)) \mid x \in E\}$) est fermé pour la norme produit.

Application 40. (admis) Si T et U sont des applications linéaires (pas forcément continues) de H satisfaisant $\forall x, y \in H, \langle T(x) \mid y\rangle = \langle x \mid U(y)\rangle$, alors T et U sont continues (donc $T, U \in \mathcal{L}(H)$).

V. Le cas des espaces de Hilbert

[Gou08, An.B, p407–416] [Bre99, Ch5, p79–82] [BMP05, §3.1.2, p95–107]

Définition 41. [Espace de Hilbert]
H est un espace préhilbertien si c'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. C'est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme issue du produit scalaire.

Remarque 42. Toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme dérive d'un produit scalaire et est donc une norme hilbertienne. C'est un critère pratique : $(\mathbb{C}([a,b],\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ n'est pas un espace de Hilbert par exemple.

Exemple 43.
- Si $(H_n)_{n\in N}$ est une suite d'espaces de Hilbert, alors $H = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} H_n \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < +\infty\right\}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n \mid y_n\rangle_{H_n}$.
- $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour tout espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Théorème 44. [Projection sur un convexe fermé]
Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert H. Alors :

$$\forall x \in H, \exists! p \in C \mid \|x - p\| = d(x, C)$$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant $\forall c \in C, \Re(\langle x - p \mid c - p\rangle) \leq 0$.

Remarque 45. On a en fait juste besoin de C complet et H préhilbertien.

Corollaire 46. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $H = F \oplus F^\perp$.*

Théorème 47. [Théorème de Riesz-Fréchet]
Soit H un espace de Hilbert. Alors pour toute application $\phi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall v \in H, \phi(v) = \langle f \mid v\rangle$.
De plus $\phi \longmapsto f$ est une isométrie ($\|f\|_H = \|\phi\|_{H'}$).

Exemple 48. Contre-exemples :
- lorsque C n'est pas convexe : soit $H = \mathbb{R}$ et $C = \mathbb{R}\backslash]-1,1[$. Alors 1 et -1 minimisent la distance de 0 à C.
- lorsque F n'est pas fermé : prendre $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et F l'ensemble des suites de H nulles à partir d'un certain rang. $F^\perp = \{0\}$ mais $E \neq F$,
- lorsque H est seulement un espace de Banach : $E = (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$. Les points $\{(x,0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$ minimisent la distance de $(0,1)$ à $\mathrm{Vect}((1,0))$.

Application 49. Existence de l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire L^2.

Application 50. Existence et unicité de l'adjoint d'un opérateur $T \in H'$.

SPEECH

L'objectif de la leçon est de généraliser les notions d'analyse (continuité, …) dans le cadre d'espaces vectoriels.
Dans la première partie, on rappelle des généralités et exemples usuels sur les espaces vectoriels normés. La notion de distance permet de faire de la topologie. On a de nombreuses caractérisations de la continuité des applications linéaires, notamment par la norme subordonnée.
Ensuite, on regarde le cas particulier des espaces vectoriels normés de dimension finie. On se ramène en fait à l'étude de $\mathbb{K}^n$. Notion de complétude Le théorème de RIESZoffre une forte caractérisation de la dimension finie.
Puis une troisième partie se consacre aux espaces de BANACH, plus restrictifs mais qui offrent en général un cadre de travail appréciable (et accessible par le théorème de complétude). On s'attarde notamment sur les théorèmes de BAIRE, de BANACH-STEINHAUS, de l'application ouverte, du graphe fermé.
Enfin on regarde le cas des espaces de HILBERT, encore plus restrictifs que les BANACH, mais qui sont un cadre également très important.

COMMENTAIRES

Beaucoup de choses à mettre dans cette leçon : en profiter pour ne mettre que des choses que l'on maîtrise et partir dans les directions que l'on souhaite.
Le [QZ13] contient tout ce qu'il faut pour cette leçon.

QUESTIONS

Q Soit $f : E \times F \longrightarrow G$ bilinéaire dans un BANACH, continue par rapport aux deux variables séparément. Montrer que f est continue.

R C'est un corollaire du théorème de BANACH-STEINHAUS.

Q Existe-t-il des applications linéaires non continues ?

R Oui, par exemple f définie par $f(p/q) = 1/q$ si $p \wedge q = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

BIBLIOGRAPHIE

[AK02] G. ALLAIRE et S.-M. KABER : *Algèbre linéaire numérique*. Ellipses, 2002.

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Bre99] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Hau07] D. HAUCHECORNE : *Les contre-exemples en Mathématiques*. Ellipses, 2ème édition, 2007.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[Rud98] W. RUDIN : *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2ème édition, 1998.