207 PROLONGEMENT DE FONCTIONS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Définition d'un prolongement d'une fonction définie sur $A \subset E$.

I. Prolongement par continuité [Gou08, §1.2, p23]

On considère des espaces métriques.

I. A. Prolongement ponctuel

Continuité d'une fonction continue en un point d'accumulation a implique $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. On peut donc prolonger par continuité la fonction si elle n'est pas définie en a lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in F$.
Exemples de sinc, contre-exemple de $\sin(1/x)$ ou d'une fonction indicatrice.

I. B. Prolongement par densité

Deux fonctions continues égales sur une partie dense sont égales, exemple d'une équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y) \to f$ est linéaire
Prolongement par densité d'applications uniformément continues, application à la définition d'une intégrale de fonctions continues à partir des fonctions en escaliers
Prolongement d'applications linéaires continues définies sur un sous-espace dense.
Application : prolongement de la transformée de Fourier définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

II. Prolongement différentiel

II. A. Prolongement $\mathcal{C}^k$ et applications [Gou08, §2.1, p74–77] [Rou99, Ch6, p328–335]

Prolongement d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ telle que $f' \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I (et $f'(a) = \ell$).
Exemple de fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^-$.
Fonctions plateaux, existence de fonction $\mathcal{C}^\infty$ admettant des limites à gauche fixées des dérivées à toute ordre.

II. B. Prolongement des solutions d'EDO [Ber17, Ch1/3]

Équation différentielle, solution, prolongement d'une solution, solution globale implique maximale, mais pas la réciproque, exemple de $x' = x^2$.
Prolongement d'une solution en une solution maximale
Théorème de Cauchy-Lipschitz
Théorème des bouts
Exemple de Lokta-Volterra
Si f est bornée : le théorème des bouts implique que la solution maximale est globale !
Lemme de Grönwall, application au théorème des bouts dans le cas d'un problème linéaire avec A, B fonctions continues

III. Prolongement de fonctions de la variable complexe

III. A. Prolongement de séries entières
[Gou08, §4.4, p236–256] [BMP05, §2.1/2.2, p47–56]

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Définition 1. [Rayon de convergence]
On définit le rayon de convergence de la série entière par le réel $R = \sup(\{r \geq 0 \,|\, (|a_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\})$.

Exemple 2. La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Proposition 3. [Lemme d'Abel]
- *Si $|z| < R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument,*
- *La série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ convergence normalement sur $\mathbb{D}_r(0)$ pour tout $r < R$. En particulier, la série entière est continue sur $\mathbb{D}_R(O)$,*

Exemple 4. On n'a pas forcément continuité sur $\overline{\mathbb{D}}_R(0)$! Considérer par exemple $\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n = \frac{1}{1-z}$ sur $\mathbb{D}_1(0)$, prolongeable en 1 par $1/2$ mais dont la série en 1 diverge.

Exemple 5. [Différents comportements possibles sur le cercle $\mathscr{C}_R(0)$]
- $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge en tout point de $\mathscr{C}_1(0)$,
- $\sum_{n\geq 0} z^n/n$ converge en tout point de $\mathscr{C}_1(0)$ sauf en 1,
- $\sum_{n\geq 0} z^n/n^2$ converge en tout point de $\mathscr{C}_1(0)$.

Théorème 6. [Théorème d'Abel]
Soit $f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Alors pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$, on a

$$\lim_{z\to 1, z\in\Delta_\alpha} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \quad \text{où} \quad \Delta_\alpha = \{1 - \rho e^{i\theta} \in \mathbb{D}(0,1) \,|\, \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha]\}$$

Théorème 7. [Théorème taubérien faible]
Soit $f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $a_n = o(1/n)$ et qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \longrightarrow_{x\to 1^-} S$. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} a_n = S$.

III. B. Prolongement des fonctions holomorphes

[Tau06, §Ch7/8, p84/89] [BMP05, §2.7, p82]

Prolongement analytique, exemple de l'identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$ étendue à $\mathbb{C}$ tout entier, du prolongement holomorphe de l'exponentielle
Application : base hilbertienne des polynômes orthogonaux
Principe du maximum, cas d'égalité, lemme de Schwarz
Types de singularité : dans le cas d'une fausse singularité prolongement par continuité holomorphe ! Exemple de sinc en 0.
Pole (simple)

Proposition 8. *Γ est holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$.*

Application 9. Γ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

Application 10. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$ **[Formule de Gauss]**

ANNEXE

Graphe de sinc, d'une fonction plateau, des solutions de $y' = y^2$, d'une solution maximale ...

SPEECH

L'objectif de cette leçon est de parvenir à prolonger des fonctions définies sur différents espaces. Par exemple la fonction sinus cardinal nous donne l'idée simple du prolongement par continuité en 0.
On comprend rapidement qu'il y a plusieurs manières de prolonger une fonction, on s'intéresse notamment aux propriétés de régularité, et à quelles conditions cela est possible. D'abord on regarde le prolongement par continuité, en utilisant une notion de densité.
Dans le cadre des équations différentielles, la notion de durée de vie des solutions amène au théorème de Cauchy-Lipschitz et au théorème des bouts. En analyse complexe, le prolongement analytique corollaire du théorème des zéros isolés permet d'assurer l'unicité.

COMMENTAIRES

Il faut savoir démontrer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, connaître le théorème de Hahn-Banach : si ce n'est pas dans le plan, on peut avoir des questions dessus.

QUESTIONS

Q Soit $\alpha \in]-1,1[$ et $u_i = (\alpha^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_i \in \ell^2(\mathbb{N})$ et que la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille totale de $\ell^2(\mathbb{N})$.

R On a $|(u_i)_n|^2 = |\alpha^{2i}|^n$ est convergente puisque $|\alpha| < 1$. Montrons que la famille est totale. Soit $v \in \operatorname{Vect}((u_i)_i)^\perp$. Regardons la série entière $f : z \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} v(n) z^n$. Son rayon de convergence est au moins 1, par critère de Cauchy-Schwarz. De plus f s'annule en les α^i, donc est nulle par le théorème des zéros isolés. Donc $v = 0$.

Q Déterminer les morphismes d'algèbre continues de $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

R Regarder l'image des polynômes puis utiliser le théorème de Weierstrass. On obtient les morphismes d'évaluation.

Q Existe-t-il $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(0,1))$ (ou $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-i,i\})$) telle que $f_{|]-1,1[} = \arctan$?

R Considérer par exemple $f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[Ber17] F. Berthelin : *Équations différentielles*. Cassini, 2017.

[BMP05] V. Beck, J. Malick et G. Peyré : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Rou99] F. Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.

[Tau06] P. Tauvel : *Analyse complexe pour la Licence 3*. Dunod, 2006.