205 ESPACES COMPLETS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

(X, d) désigne un espace métrique non vide.

I. Généralités sur la complétude [Gou08, §1.2, p19–27]

I. A. Suites de Cauchy

Définition 1. [Suite de Cauchy]
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall p, q \geq n_0, d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

Proposition 2.
- *Toute suite convergente est de Cauchy.*
- *Une suite de Cauchy est bornée et $\sup_{p,q} d(u_p, u_q) < +\infty$.*
- *Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.*

Définition 3. [Espace complet, espace de Banach]
X est dit complet si toute suite de Cauchy de X est convergente.

Exemple 4. $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet : considérer par exemple $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ou $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{2}{u_n}}{2}$. [Hau07, §16.7, p312]

I. B. Premières propriétés

Théorème 5. [Complété d'un espace métrique]
Il existe un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$ et une isométrie $i : (X, d) \longrightarrow (\hat{X}, \hat{d})$ d'image dense. De plus, si $(\hat{X}', \hat{d}')$ et i' convient également, alors il existe une isométrie bijective φ : $\hat{X} \longrightarrow \hat{X}'$ telle que $\phi \circ i = i'$.

Exemple 6.
- $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pour la distance usuelle (on construit en fait $\mathbb{R}$ comme étant le complété de $\mathbb{Q}$),
- $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme uniforme, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ **[Théorème de Weierstrass]**.

Proposition 7. *Si (X, d) est complet et $A \subset X$, alors (A, d) est complet si et seulement si A est fermé dans X.*

Proposition 8. *Si $((X_i, d_i))_{1\leq i\leq n}$ sont des espaces métriques, alors $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est complet pour la distance produit si et seulement si tous les $((X_i, d_i))_{1\leq i\leq n}$ sont complets.*
En particulier, un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème 9. [Théorème des fermés emboîtés]
Si X est complet, alors pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de fermés non vides de X dont le diamètre tend vers 0, $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Exemple 10. $(\mathbb{R}, d)$ où $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ n'est pas complet.

Proposition 11. *Un métrique est compact si et seulement si il est précompact est complet.*

II. Exemples d'espaces vectoriels normés complets

II. A. Espaces de Banach, exemple des applications linéaires continues [Gou08, §1.5, p47]

Définition 12. [Espace de Banach]
Un espace vectoriel normé complet est un espace de Banach.

Proposition 13. *$(E, \|.\|)$ est un espace Banach si et seulement si toute série à termes dans E absolument convergente est convergente.*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach.

Exemple 14. $(\mathcal{B}(X, E), \|.\|_\infty)$ et $(\mathcal{C}_b(X, E), \|.\|_\infty)$ sont des espaces de Banach, et donc $(\mathcal{C}(K, E), \|.\|_\infty)$ pour K compact aussi.

Proposition 15. *Si F est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ est complet pour $|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$. Ainsi, le dual topologique d'un e.v.n. est toujours complet.*

Application 16. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\|u\| \leq 1$, alors $(\mathrm{Id} - u) \in \mathrm{GL}(E)$ et son inverse est $\sum_{n\geq 0} u^n$. On en déduit que $\mathrm{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

II. B. Espaces L^p [BP15, Ch9, p157–194] [Bre99, ChIV, p54]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 17. [Application $\|.\|_p$, espace $\mathcal{L}^p$]
Pour $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable, on définit $\|f\|_p = (\int_E |f|^p \, d\mu)^{1/p}$ lorsque p est fini, et $\|f\|_\infty = \inf \{M > 0 \,|\, |f| \leq M \text{ } \mu\text{-p.p.}\}$. On définit l'espace vectoriel :

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable} \,|\, \|f\|_p < +\infty\}$$

Théorème 18. [Inégalité de Hölder]
Pour toutes fonctions $f, g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables, on a $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$.

Corollaire 19. [Inégalité de Minkowski]
Pour toutes fonctions $f, g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables, on a $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition 20. [Espace L^p]
On note $L^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)/\{\|.\|_p = 0\}$ (ou $L^p(E)$, ou L^p) l'ensemble des fonctions de $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.. L'application $\|.\|_p$ passe au quotient et définit ainsi une application sur $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ notée également $\|.\|_p$ par abus.

Corollaire 21. *$\|.\|_p$ est une norme et l'espace $(L^p(E), \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

Exemple 22. [Espace ℓ^p]
Cas où $E = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage.
Si p est fini, on note ℓ^p l'espace $\mathcal{L}^p = L^p = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty\}$.
$\ell^\infty = \mathcal{L}^\infty = L^\infty$ est l'espace des suites bornées.

Théorème 23. [Théorème de Riesz-Ficher]
L'espace $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.

Corollaire 24. *Toute suite convergente de L^p admet une sous-suite qui converge μ-p.p..*

Contre-exemple : on n'a pas forcément convergence de la suite p.p. : bosses roulantes.

II. C. Le cas des espaces de Hilbert

[Gou08, An.B, p407–416] [Bre99, Ch5, p79–82] [BMP05, §3.1.2, p95–107]

Définition 25. [Espace de Hilbert]
H est un espace préhilbertien si c'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. C'est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme issue du produit scalaire.

Remarque 26. Toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme dérive d'un produit scalaire et est donc une norme hilbertienne. C'est un critère pratique : $(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ n'est pas un espace de Hilbert par exemple.

Exemple 27.
- Si $(H_n)_{n\in N}$ est une suite d'espaces de Hilbert, alors $H = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} H_n \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < +\infty\}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n \mid y_n \rangle_{H_n}$.
- $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour tout espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Théorème 28. [Projection sur un convexe fermé]
Soit C un convexe fermé d'un espace de Hilbert *H. Alors :*

$$\forall x \in H, \exists! p \in C \mid \|x-p\| = d(x, C)$$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant $\forall c \in C, \Re(\langle x-p \mid c-p \rangle) \le 0$.

Remarque 29. On a en fait juste besoin de C complet et H préhilbertien.

Corollaire 30. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $H = F \oplus F^\perp$.*

Exemple 31. Contre-exemples :
- lorsque F n'est pas fermé : prendre $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et F l'ensemble des suites de H nulles à partir d'un certain rang. $F^\perp = \{0\}$ mais $E \neq F$,
- lorsque H est seulement un espace de Banach : $E = (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$. Les points $\{(x,0) \mid -1 \le x \le 1\}$ minimisent la distance de $(0,1)$ à $\mathrm{Vect}((1,0))$.

Application 32. Existence et unicité de l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire.

Application 33. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors il existe un unique opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$\forall x, y \in H, \langle T(x) \mid y \rangle = \langle x \mid U(y) \rangle$$

Théorème 34. [Théorème de Riesz-Fréchet]
Soit H un espace de Hilbert*. Alors pour toute application $\phi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall v \in H, \phi(v) = \langle f \mid v \rangle$.*
De plus $\phi \longmapsto f$ est une isométrie ($\|f\|_H = \|\phi\|_{H'}$).

III. Utilisation de la complétude

III. A. Prolongement d'applications

[Gou08, §1.2, p22–23]

Théorème 35. *Soient E et F deux espaces métriques, D une partie dense de E. Si F est complet alors toute application uniformément continue de D dans F admet un unique prolongement continu sur E. Ce prolongement est de plus uniformément continu.*

Corollaire 36. *Soient E un espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel dense de E et F un espace de Banach. Alors toute application linéaire continue de D dans F a un unique prolongement linéaire continu sur E.*

Application 37. Prolongement de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathrm{Leb})$.

III. B. Théorèmes de point fixe

[Gou08, §1.2, p21–23]

Théorème 38. [Théorème de point fixe de Picard]
Soit (X, d) un espace métrique complet et $\phi : X \longrightarrow X$ une application k-contractante pour un $k \in]0, 1[$. Alors ϕ admet un unique point fixe. De plus, toute suite à valeurs dans X définie par $u_{n+1} = \phi(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de ϕ.

Corollaire 39. *Le résultat reste valable si l'on suppose seulement que l'une des itérées de ϕ est contractante.*

Remarque 40. Contre-exemple lorsque X n'est pas complet : $X =]0, 1]$ et $\phi : x \longmapsto x/2$. Lorsque l'on a seulement $f(\phi(x), \phi(y)) < d(x, y)$, le résultat est faux dans le cas général ($\phi : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1}$) mais est vrai si X est compact.

Corollaire 41. *Soit Λ un espace métrique et $\phi : X \times \Lambda \longrightarrow X$ une application continue et uniformément contractante par rapport à Λ, c'est-à-dire il existe $k \in]0, 1[$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\phi(., \lambda)$ est k-contractante. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ à $\phi(., \lambda)$ et l'application $\lambda \longmapsto x(\lambda)$ est continue.*

Théorème 42. [Théorème de Cauchy-Lipschitz] *[Rou99, p167]*
Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^m$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue globalement lipschtizienne en la seconde variable (c'est-à-dire pour tout $K \subset I$ compact, $\exists k > 0 \,|\, \forall t \in K, \forall y, z \in \mathbb{R}^m, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k \|y - z\|$).
Alors pour $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ donnés, le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x \end{array} \right.$ admet une unique solution définie sur I.

Exemple 43. Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Il existe une unique solution $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{array} \right.$$

III. C. Autour du théorème de Baire

[Gou08, An.A, p397–406] [Rud98, Ch5, p125] [Bre99, Ch2, p15–21]

Théorème 44. [Théorème de Baire]
Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses d'un espace complet E, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ l'est aussi.

Application 45. Un espace de Banach est de dimension finie ou non dénombrable. Par exemple $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Théorème 46. [Théorème de Banach-Steinhaus]
Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}_c(E, F)$ simplement bornée (c'est-à-dire $\forall x \in E, \sup_{i\in I} \|u_i(x)\| \leq +\infty$). Alors $\sup_{i\in I} \|\|u_i\|\| < +\infty$.

Application 47. Existence d'une fonction continue 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

Application 48. Soient E, E_1 des espaces de Banach et E_2, F des espaces vectoriels normés.
- Soit $f : E \longrightarrow F$ limite simple d'une famille d'applications de $\mathcal{L}_c(E, F)$. Alors $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.
- Soit $B : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ une application bilinéaire telle que les applications partielles soient continues. Alors $B \in \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)$.

Théorème 49. [Théorème de l'application ouverte]
Une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach est ouverte.

Corollaire 50. *Une application linéaire continue bijective entre espaces de Banach est d'inverse continue.*

Application 51. Si un espace de Banach est muni de 2 normes dont l'une est plus fine que l'autre, alors elles sont équivalentes.

Corollaire 52. [Théorème du graphe fermé]
Une application linéaire $T : E \longrightarrow F$ entre deux espaces de Banach est continue si et seulement si son graphe ($\{(x, T(x)) \,|\, x \in E\}$) est fermé pour la norme produit.

Application 53. (admis) Si T et U sont des applications linéaires (pas forcément continues) de H satisfaisant $\forall x, y \in H, \langle T(x) \mid y\rangle = \langle x \mid U(y)\rangle$, alors T et U sont continues (donc $T, U \in \mathcal{L}(H)$).

SPEECH

Lorsque l'on s'intéresse à des limites de familles d'éléments d'un espace, la question de l'existence de la limite peut souvent poser problème. Lorsqu'elle existe, la limite peut aussi ne pas appartenir à l'espace de départ. Les espaces complets sont alors un cadre très pratique car ce sont des espaces dans lesquels les suites convergentes admettent leur limite dans ces espaces. Travailler dans ces espaces assure donc de nombreux résultats d'existence dont nous allons parler dans cette leçon.
De plus, tout espace métrique peut être complété en un espace complet, et donc dans la pratique on peut assez facilement se placer dans ce contexte.

QUESTIONS

Q Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable en utilisant le théorème des fermés emboités.

Q On veut montrer que le théorème de l'application ouverte n'est plus valable lorsque l'un des deux espaces n'est pas de BANACH. Considérer $\mathrm{id} : (\ell^2, \|.\|_2) \longrightarrow (\ell^2, \|.\|_\infty)$.

R Cette fonction est bien définie, bijective, et on a que id est continue puisque $\|.\|_\infty \leq \|.\|_2$. Or, si id^{-1} était continue, on aurait l'existence de C telle que $\|.\|_2 \leq C \|.\|_\infty$ et en prenant $x^n = (\delta_{i\leq n})_{i\in\mathbb{N}}$, on aboutit à une contradiction.

Q Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\{|n\int_0^1 f - \sum_{k=1}^n f(k/n)|\} = +\infty$.

R On pose $u_n : f \longmapsto \left|n\int_0^1 f - \sum_{k=1}^n f(k/n)\right|$. Alors $u_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et E et $\mathbb{R}$ sont complets.
A $n \in \mathbb{N}$ fixé, on peut trouver f d'intégrale $1/2$, de norme infinie 1 et nulle en les $(k/n)_{0\leq k\leq n}$ (par exemple affine par morceaux avec $f(2k + 1/2n) = 1$).
On a $|u_n(f)| \leq 2n\|f\|_\infty$ et on trouve une fonction qui atteint cette borne (1 sur les $(k/n)_k$, -1 sur les $(2k + 1/n)_k$).

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[BP15] M. BRIANE et G. PAGÈS : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[Bre99] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Hau07] D. HAUCHECORNE : *Les contre-exemples en Mathématiques*. Ellipses, 2ème édition, 2007.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.

[Rud98] W. RUDIN : *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2ème édition, 1998.