203 UTILISATION DE LA NOTION DE COMPACITÉ.

Soit (X,d) un espace métrique (donc séparé).

I. Caractérisations de la compacité, premières utilisations
[Gou08, §1.3, p27]

I. A. Propriété de Borel-Lebesgue

Définition par la propriété de Borel-Lebesgue, exemples d'un espace fini, contre exemple de $\mathbb{R}$, caractérisation par les fermés, fermés dans un compact, intersection (union finie) de compacts, théorème de Tychonov, théorème des fermés emboités,
Premier théorème de Dini. Contre-exemple si la fonction limite n'est pas continue : $x \longmapsto x^n$.
Remarque : un espace compact est par définition séparé ! à ne pas oublier dans la définition

I. B. Théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences
[Gou08, §1.4, p46] [FGN07, §2.19, p86]

X est compact si et seulement si il satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass.
X est précompact et complet si et seulement si X compact. Exemples des compacts d'un espace de dimension finie. X compact implique $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ complet.
Procédé d'extraction diagonale

Proposition 1. *Soit (E,d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $d(u_n,u_{n+1}) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.
Alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est connexe.*

Application 2. [Lemme de la grenouille]
Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [0,1]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

II. Fonctions continues sur un compact

II. A. Extrema [Gou08, §2.1, p71]

L'image d'un compact par une application continue est un compact. Pas forcément l'image réciproque. Une application continue définie sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
Si f est coercive continue et minorée alors elle admet un minimum qui est atteint.
La distance à un compact est atteinte.
Théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis
Équivalence des normes en dimension finie, application à la continuité des applications linéaires

II. B. Théorème de Heine [Gou08, §1.3, p31]

Théorème de Heine. Exemples : fonctions continues périodiques, ou continues avec une limite finie en $\pm\infty$, deuxième théorème de Dini

II. C. Théorème de point fixe [Gou08, §1, p21/32]

Point fixe dans un compact, exemple de $\cos$.
Application : si X est compact, $f : X \longrightarrow X$ est telle que $d(f(a),f(b)) \geq d(a,b)$ pour tout $a,b \in X$, alors f est une isométrie bijective sur X. [FGN14, §2.3, p68]
Application : si K est compact convexe et f est 1-lipschitzienne, alors f admet au moins un point fixe.
Théorèmes du point fixe de Brouwer, de Schauder

II. D. Théorème de Stone-Weierstrass [HL09, Ch1, p26]

Soit (X,d) un compact non vide.

Théorème 3. [Théorème de Stone-Weierstrass]
Soit H une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ séparante et unitaire. Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Application : théorème de Weierstrass (dans le cas où l'on est sur $\mathbb{R}$, la limite est nécessairement un polynôme), base de Fourier des fonctions 2π-périodiques

III. Compacité en dimension finie

III. A. Espaces vectoriels normés [HL09, Ch2, p43] [FG97, §2.32, p77–78]

Théorème de Riesz
En dimension infinie : la boule unité de $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$ n'est pas compacte : $f_n : x \longmapsto x^n$ converge vers une fonction non continue !

Proposition 4. *Soit K un espace métrique compact. Les morphismes d'anneaux de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ sont les morphismes d'évaluation $(\mathrm{ev}_t : f \longmapsto f(t))_{t\in K}$.*

III. B. Le théorème d'Arzela-Ascoli [HL09, Ch1, p37]

Soit X un compact. Définition de l'(uniforme) équicontinuité d'une partie de $\mathcal{C}(X)$, exemple des fonctions lipschitziennes
Théorème d'Ascoli, application aux opérateurs à noyaux $\to$ opérateurs compacts

QUESTIONS

Q Peut-on trouver une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non limite uniforme de polynômes ?

R Oui, toute fonction continue qui n'est pas un polynôme !

Q Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = 0$.

R On approxime f uniformément par une suite $(P_n)_n$ de polynômes. On a pour tout n, $\int_a^b f(t)P_n(t)dt = 0$, et donc $\int_a^b f(t)^2 dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)P_n(t)dt = 0$.

Q Soient X, Y métriques compacts. Montrer que toute $f \in \mathcal{C}(X \times Y, \mathbb{R})$ est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions produits.

Q Montrer sans le théorème de Riesz que la boule unité des polynômes n'est pas compacte.

R Considérons la norme infinie sur $[0,1]$ et la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la boule unité était compacte, il existerait une sous-suite φ et un polynôme P tel que $X^{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P$, et alors on aurait $P(1) = 1$ et $P([0,1[) = 0$ ce qui est impossible par continuité d'un polynôme.

Q Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides. Montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \varnothing$.

R Prenons $x_n \in X_n$ pour tout n. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_0^{\mathbb{N}}$ donc x_n converge vers un x quitte à extraire. Comme $(x_n)_{n\geq k} \in X_k^{\mathbb{N}}$, on a que $x \in X_k$ pour tout k, et donc $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Q Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que $\overline{\mathbb{B}}(0,1)$ est compacte si et seulement si $\mathbb{S}(0,1)$ l'est.

R Si $\overline{\mathbb{B}}(0,1)$ est compacte, $\mathbb{S}(0,1)$ l'est. Réciproquement, si $\mathbb{S}(0,1)$ est compacte, soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{B}}(0,1)$. Si elle ne converge pas vers 0, supposons qu'aucun des termes n'est nul quitte à extraire. Alors $\frac{x_n}{\|x_n\|} \in \mathbb{S}(0,1)$ converge quitte à extraire, et $\|x_n\| \in [0,1]$ converge quitte à extraire, donc finalement $(x_n)_n$ converge.

Q $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \mid M^\top M = \mathrm{Id}_n\right\}$ est-il compact ?

R Il est fermé car $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{\mathrm{Id}_n\})$ où $f(M) = M^\top M$ est continue. Il est bien sûr borné.

Q Soit A un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $S = \left\{P^{-1}MP \mid M \in A, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$ est-il compact ?

R Non, si on prend pour A un singleton, sa classe de similitude est bornée si et seulement si c'est une homothétie !

BIBLIOGRAPHIE

[FG97] S. Francinou et H. Gianella : *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1.* Masson, 1997.

[FGN07] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas : *Oraux X-ENS - Analyse 1.* Cassini, 2007.

[FGN14] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas : *Oraux X-ENS - Analyse 3.* Cassini, 2ème édition, 2014.

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse.* Ellipses, 2ème édition, 2008.

[HL09] F. Hirsch et G. Lacombe : *Eléments d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 2009.