$\boxed{202}$ EXEMPLES DE PARTIES DENSES ET APPLICATIONS.

Soit (E,d) un espace métrique, A une partie de E
Adhérence de A, définition de A dense

I. En dimension finie

I. A. Densité sur $\mathbb{R}$ [Gou08, §1.1, p10] [FGN07, §1.13, p29]

A est dense si et seulement si $A\cap]a,b[\neq\varnothing$ pour tout $a<b$
Exemples de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, application : le seul morphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'identité
Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit dense soit de la forme $a\mathbb{Z}$
$a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$est dense si et seulement si a et b sont commensurables, $(\mathrm{e}^{in\theta})_n$ est dense dans $\mathbb{U}$ si et seulement si $\theta\notin 2\pi\mathbb{Q}$
Densité dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^n$

I. B. Densité dans les espaces de matrices
[BMP05, §4.3.3/4.6, p179/217] [MM16, §VII.3, p76]

Densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, application : $\chi_{AB}=\chi_{BA}$, différentielle du déterminant
Densité des matrices diagonalisables dans les trigonalisables, donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en particulier
Application au théorème de Cayley-Hamilton, non continuité du polynôme minimal, de la décomposition de Dunford

II. Densités dans les fonctions continues sur un compact

II. A. Généralités [HL09, Ch1, p26–30]

Soit (X,d) un compact non vide. Espace des fonctions continues sur un compact, muni de la norme uniforme

Théorème 1. [Théorème de Stone-Weierstrass]
Soit H une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ séparante et unitaire. Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Application : théorème de Weierstrass (dans le cas où l'on est sur $\mathbb{R}$, la limite est nécessairement un polynôme), polynôme de Bernstein, densité des fonctions lipschitziennes
Application : une fonction continue f telle que $\int_a^b f(x)x^n dx=0$ pour tout n est nulle

II. B. Fonctions périodiques
[Gou08, Ch4.5, p256–270] [QZ13, ChIV, p68–135] [BMP05, §3.3.3/3.3.4, p127]

Densité des polynômes trigonométriques dans les fonctions 2π-périodiques continues $\to$ base de Fourier des fonctions 2π-périodiques
On note $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e_n=\mathrm{e}^{in\cdot}$ pour $n\in\mathbb{Z}$. On définit lorsque cela a un sens $\langle f\mid g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$ et $\|f\|_1=\sqrt{\langle f\mid f\rangle}$.

Définition 2. [Coefficient de Fourier]
Pour $f\in L^1(\mathbb{T})$, on définit $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt=\langle f\mid e_n\rangle$ le n-ième coefficient de Fourier de f, où $n\in\mathbb{Z}$.

Définition 3. [Somme partielles de Fourier, de Fejér]
On appelle somme partielle de Fourier d'ordre $N\in\mathbb{N}$ la quantité $S_N(f)=\sum_{n=-N}^{N}c_n(f)e_n$.
On appelle somme partielle de Fejér d'ordre $N\in\mathbb{N}$ la quantité $\sigma_N(f)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_N(f)$.

Définition 4. [Noyaux de Dirichlet, de Fejér]
On appelle noyau de Dirichlet à l'ordre $N\in\mathbb{N}$ la fonction $D_N=\sum_{n=-N}^{N}e_n$.
On appelle noyau de Fejér à l'ordre $N\in\mathbb{N}$ la fonction $K_N=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}D_n=\sum_{n=-N}^{N}(1-|n|/N)e_n$.

Théorème 5. [Théorème de Fejér]
Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty\leq\|f\|_\infty$ pour tout $N\geq 1$ et $\sigma_N(f)=f*K_N\xrightarrow[N\to+\infty]{u}f$.

Remarque 6. On peut retrouver le théorème de Weierstrass à partir de ce résultat.

Application 7. $\mathcal{F}:\mathcal{C}(\mathbb{T})\longrightarrow c_0(\mathbb{Z}),f\longmapsto(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective.

Théorème 8. *$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier, pour $f\in L^2(\mathbb{T})$:*

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e_n \qquad \text{et} \qquad \|f\|_{L^2}^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$$

Application 9. [Calculs de séries]
On peut reprendre l'Exemple 41 pour calculer les normes des applications dans L^2 : pour $a\in[\![0,2\pi]\!]$: $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin(na)}{n}=\frac{\pi-a}{2}$ (première fonction) et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ (deuxième fonction).
On peut aussi calculer classiquement $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Théorème 10. *Si $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})\cap\mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{T})$, alors $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers f.*

Exemple 11. Contre-exemple sans l'hypothèse $\mathcal{C}^1_{pm}$: il existe une fonction $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $(S_N(f)(0))_{N\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (c'est un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus).

III. Espaces L^p

[BP15, Ch9, p157–194] [Bre99, ChIV, p54] [QZ13, ChIX.III, p318]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se place sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, dont on suppose la construction connue. Soit $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

On suppose connue la construction des espaces L^p, des normes $\|.\|_p$, la complétude de L^p pour $p < +\infty$.

Théorème 12. *Lorsque $p < \infty$:*
(i) l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans L^p,
(ii) l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p,
(iii) L^p est séparable.

Application 13. Uniforme continuité de l'opérateur par translation : pour tout $f \in L^p$, $a \longmapsto \tau_a f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 14. On appelle convolution de f et g la fonction $f \star g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$, lorsque celle-ci est bien définie.

Définition 15. [Approximation de l'unité et suite régularisante]
Une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de fonctions positives de L^1 est une approximation de l'unité si :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1$,
- pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{x\geq\varepsilon\}} \alpha_n d\lambda_d = 0$.

Si de plus les $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ sont de classe $\mathcal{C}_c^\infty$, alors on dit que c'est une suite régularisante.

Exemple 16. [Existence d'une suite régularisante]
On considère $\phi : x \longmapsto \exp(\frac{1}{\|x\|^2-1})\mathbb{1}_{]0,1[}(\|x\|)$ puis $\alpha : x \longmapsto \frac{\phi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \phi d\lambda_d}$.
Alors la suite $\alpha_n : x \longmapsto n^d \alpha(nx)$ est une suite régularisante.

Théorème 17.
(i) Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $f \star g$ existe μ-p.p. et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
(ii) Si $p < +\infty$, soient $f \in L^p$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors $f * \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$.

Application 18. [Construction de fonctions plateaux]
Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert contenant K. Alors il existe $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ et $0 \leq \theta \leq 1$.

Théorème 19. *$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$.*

IV. Densité dans les espaces de Hilbert

[BMP05, §3.1.5, p110] [Dem96, §II.5, p51]

Soit H un espace de Hilbert.
Critères de densité dans un espace de Hilbert. Théorème d'existence d'une base hilbertienne
Formules de Parseval, exemple
Cas de L^2 : c'est un espace de Hilbert avec le produit scalair associé ...
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 20. Soit $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, strictement positive et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$. On dit alors que ρ est une fonction de poids.

Définition 21. On définit $L^2(I, \rho) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_I |f(x)|^2 \rho(x)dx < +\infty \right\}$.

Proposition 22. *$L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert pour le produit du scalaire $\langle f \mid g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$.*

Proposition 23. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux pour $\langle . \mid .\rangle_\rho$ et tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout n.*

Exemple 24. Voir les dessins en annexe :
- Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, les $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes de Hermite,
- Pour $I = [-1, 1]$ et $\rho : x \longmapsto 1$, les $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes de Legendre.

Théorème 25. [Base hilbertienne de polynômes orthogonaux]
Soit ρ une fonction de poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I \mathrm{e}^{\alpha|x|} \rho(x)dx < +\infty$, alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Exemple 26. Sans l'hypothèse on a le contre-exemple suivant : soit la fonction de poids $w : x \longmapsto x^{-\ln(x)}$ sur $I = \mathbb{R}_+$. Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne forme pas une base de $L^2(I, w)$.

Application 27. Si I est borné, on a donc nécessairement une base hilbertienne.
La famille $(P_n \exp(-.^2/2))_n$, pour $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les polynômes de Hermite, est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

QUESTIONS

Q Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f_{|\mathbb{Q}} = 0$. Montrer que $f = 0$.

Q Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel normé. Que dire de ses propriétés topologiques ?

R Soit H est dense, soit H est fermé. En effet, $H \subset \overline{H} \subset E$, donc soit $\overline{H} = H$, soit $\overline{H} = E$.

Q Donner des exemples d'hyperplans denses/fermés.

R Soit $\varphi_1 : f \longmapsto \int f$ et $\varphi_2 : f \longmapsto f(0)$ sur $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_1)$. φ_1 est continue tandis que φ_2 ne l'est pas. Leur noyau respectif est donc fermé et dense.

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. Beck, J. Malick et G. Peyré : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[BP15] M. Briane et G. Pagès : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[Bre99] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.

[Dem96] J.-P. Demailly : *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences, 1996.

[FGN07] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas : *Oraux X-ENS - Analyse 1*. Cassini, 2007.

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[HL09] F. Hirsch et G. Lacombe : *Eléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009.

[MM16] R. Mansuy et R. Mneimné : *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes*. De Boeck, 2 ème édition, 2016.

[QZ13] H. Queffélec et C. Zuily : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.