$\boxed{201}$ ESPACES DE FONCTIONS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Espaces de fonctions continues

I. A. Fonctions continues et norme uniforme

Fonctions continues, norme uniforme, une limite simple de fonctions continues est continue, interversion de limites, exemples et contre-exemples
L'espace des fonctions bornées est un BANACH

I. B. Fonctions continues sur un compact
[Gou08, §1.3/4.3, p31/228] [HL09, Ch1, p37]

L'image d'un compact par une application continue est un compact. Les fonctions continues sont donc bornées, $\mathcal{C}(K)$ est un espace de de BANACH.
Minimisation sur un compact, application : si f est coercive continue et minorée alors elle admet un minimum qui est atteint.
Théorème de HEINE. Application aux fonctions 2π-périodiques, théorème de DINI. Contre-exemple si l'on n'est plus sur un compact
Autre application : une limite simple continue de fonctions continues sur un compact est une limite uniforme
X compact. Définition de l'(uniforme) équicontinuité d'une partie de $\mathcal{C}(X)$, exemple des fonctions lipschitziennes
Théorème d'ARZELA-ASCOLI, application aux opérateurs à noyaux $\to$ opérateurs compacts

I. C. Densités de familles de fonctions
[HL09, Ch1, p26–30]

Soit (X, d) un compact non vide.

THÉORÈME 1. [THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS]
Soit H une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ séparante et unitaire. Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Application : théorème de WEIERSTRASS (dans le cas où l'on est sur $\mathbb{R}$, la limite est nécessairement un polynôme), base de FOURIER des fonctions 2π-périodiques
Application : une fonction continue f telle que $\int_a^b f(x)x^n dx = 0$ pour tout n est nulle

II. Espaces de LEBESGUE
[BP15, Ch9, p157–194] [Bre99, ChIV, p54]

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, muni de sa tribu borélienne et de la restriction à Ω de la mesure de LEBESGUE, dont on suppose la construction connue. Soit $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

II. A. Construction

DÉFINITION 2. [APPLICATION $\|.\|_p$, ESPACE $\mathcal{L}^p$]
Pour $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable, on définit $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ lorsque p est fini, et $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid |f| \leq M \ \mu\text{-p.p.}\}$. On définit l'espace vectoriel :

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty\}$$

THÉORÈME 3. [INÉGALITÉ DE HÖLDER]
Pour toutes fonctions $f, g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables, on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

COROLLAIRE 4. [INÉGALITÉ DE MINKOWSKI]
Pour toutes fonctions $f, g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables, on a $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

DÉFINITION 5. On note $L^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)/\{\|.\|_p = 0\}$ (ou $L^p(E)$, ou L^p) l'ensemble des fonctions de $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.. L'application $\|.\|_p$ passe au quotient et définit ainsi une application sur $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ notée également $\|.\|_p$.

COROLLAIRE 6. *$\|.\|_p$ est une norme et l'espace $(L^p(E), \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

APPLICATION 7. [INCLUSION ENTRE ESPACES L^p] Soient $p, p' \in [1, +\infty]$.
- lorsque $\mu(E) < +\infty$, on a $p < p' \Longrightarrow L^{p'} \subset L^p$,
- contre-exemple dans le cas où $\mu(E) = +\infty$: $f : x \longrightarrow (1+x)^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \in L^2 \setminus L^1$.
- on a $p' < p \Longrightarrow \ell^{p'} \subset \ell^p$.

Dans le cas général il n'y a pas d'inclusion (contre-exemple).

II. B. Propriétés des espaces L^p

THÉORÈME 8. [THÉORÈME DE RIESZ-FICHER]
L'espace $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|.\|_p)$ est un espace de BANACH.

COROLLAIRE 9. *Toute suite convergente dans L^p admet une sous-suite qui converge μ-p.p..*

EXEMPLE 10. Contre-exemple de non-convergence de la suite μ-p.p. : les bosses roulantes.

THÉORÈME 11. *Lorsque $p < \infty$:*

(i) l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans L^p,

(ii) l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p,

(iii) L^p est séparable.

APPLICATION 12. Uniforme continuité de l'opérateur par translation : pour tout $f \in L^p$, $a \longmapsto \tau_a f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

II. C. Approximation de l'unité et régularisation par convolution

[BP15, Ch14, p291–314] [QZ13, ChIX.III, p318]

On se place sur $E = \mathbb{R}^d$ où d est un entier quelconque.

DÉFINITION 13. On appelle convolution de f et g la fonction $f \star g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$, lorsque celle-ci est bien définie.

DÉFINITION 14. [APPROXIMATION DE L'UNITÉ ET SUITE RÉGULARISANTE]
Une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de fonctions positives de L^1 est une approximation de l'unité si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1$,
- pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{x \geq \varepsilon\}} \alpha_n d\lambda_d = 0$.

Si de plus les $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ sont de classe $\mathcal{C}_c^\infty$, alors on dit que c'est une suite régularisante.

EXEMPLE 15. [EXISTENCE D'UNE SUITE RÉGULARISANTE]
On considère $\phi : x \longmapsto \exp(\frac{1}{\|x\|^2-1})\mathbb{1}_{]0,1]}(\|x\|)$ puis $\alpha : x \longmapsto \frac{\phi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \phi d\lambda_d}$.
Alors la suite $\alpha_n : x \longmapsto n^d \alpha(nx)$ est une suite régularisante.

THÉORÈME 16.

(i) Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $f \star g$ existe μ-p.p. et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

(ii) Si $p < +\infty$, soient $f \in L^p$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors $f * \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$.

APPLICATION 17. [CONSTRUCTION DE FONCTIONS PLATEAUX]
Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert contenant K. Alors il existe $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ et $0 \leq \theta \leq 1$.

THÉORÈME 18. *$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$.*

III. Fonctions holomorphes [Tau06]

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$

Fonction holomorphe, stabilité, exemple, une série entière est holomorphe $\mathcal{C}^\infty$
Formule de CAUCHY, contre-exemple avec le lemme de l'indice
Fonction holomorphe si et seulement si analytique, principe du maximum, théorème des zéros isolés
Limite d'une suite uniforme de fonctions holomorphes

QUESTIONS

Q Soit K un compact. Montrer que $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est séparable.

R Il s'agit du théorème de STONE-WEIERSTRASS ! Si K est un compact de $\mathbb{R}$, les polynômes sont en effet denses dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Sinon, K est séparable, considérons $(U_n)_n$ une base dénombrable d'ouverts et soit $f_n : x \longmapsto d(x, U_n^c)$. On pose alors $X = \{P((f_n)_n) \mid P \in \mathbb{Q}[(X_n)_n]\}$ qui est un ensemble dénombrable et dense par le théorème de STONE-WEIERSTRASS.

BIBLIOGRAPHIE

[BP15] M. BRIANE et G. PAGÈS : *Théorie de l'intégration*. Vuibert, 6ème édition, 2015.

[Bre99] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE : *Eléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009.

[QZ13] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.

[Tau06] P. TAUVEL : *Analyse complexe pour la Licence 3*. Dunod, 2006.