183 UTILISATION DES GROUPES EN GÉOMÉTRIE.

Soit $\mathcal{E}$ espace affine dirigé par E (action transitive de $(E,+)$ sur $\mathcal{E}$).

I. Transformations d'un espace affine

[Rom17, Ch3, p75] [Aud06, §I.3/4, p16/26]

I. A. Espace et applications affines

Définition espace affine, exemple du plan, de l'espace
Application affine. Préservation de l'alignement, du parallélisme, des barycentres
Exemple d'une translation
Ensemble des points fixes. Exemple de l'homothétie affine

I. B. Le groupe affine

Définition de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$. C'est un groupe
Bijection entre $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GA}_P(\mathcal{E})$ le sous-ensemble de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ fixant P
Écriture sous la forme $f = t_u \circ g = h \circ t_v$
Action transitive du groupe affine sur les repères affines de $\mathcal{E}$
Groupe $D(\mathcal{E}) = L^{-1}(Z(\mathrm{GL}(E)))$ formé des dilatations : sous-groupe distingué
Relations de conjugaison pour les homothéties

I. C. Utilisation du groupe affine

Théorèmes de Thalès et de Desargues

II. Géométrie euclidienne, groupe d'isométries

[Aud06, ChII/III/V, p51/73/143]

II. A. Groupe des isométries affines **[Rom17]**

Isométrie affine, exemple : homothétie de rapport ± 1
Réflexion affine : σ telle que $\vec{\sigma}$ est une réflexion vectorielle et σ a un point fixe $\to$ isométrie
$\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$. L morphisme surjectif de noyau $T(\mathcal{E})$
Déplacements, anti-déplacements
Engendrement de $O(E)$ (resp. $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$) par les réflexions vectorielles (resp. affines). Toute isométrie est produit d'au plus n (resp. $n+1$) réflexions.

II. B. Angles orientés en dimension 2 et similitudes **[Aud06, §III.1, p73]**

Définition de l'angle par une action de groupes. Groupe des similitudes : une application linéaire est une similitude directe si et seulement si elle préserve les angles orientés

II. C. Isométries planes, isométries de l'espace **[Aud06, §III.2, p85]**

Décomposition d'une isométrie affine
Classification des isométries du plan et de l'espace

II. D. Quaternions et géométrie de l'espace **[CG13, ChVII, p232]**

Groupe des quaternions sous forme matricielle, conjugué, norme d'un quaternion, produit scalaire associé, la base $(1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$ est orthonormée, $\mathbb{H} = \mathbb{I} \oplus^{\perp} \mathbb{R}$
On définit $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) = \{h \in \mathbb{H} \mid N(h) = 1\}$

Théorème 1. *On a* $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) / \{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

III. Groupes des isométries fixant une partie

III. A. Généralités **[Rom17, §3.4, p84]**

Groupe des isométries préservant une partie de $\mathcal{E}$. Isométries positives/négatives …
L'isobarycentre est conservé par une isométrie (en particulier un potentiel centre de symétrie)
Bijection isométries positives/négatives

III. B. Polygones et polyèdres convexes **[Rom17, §3.4, p88], [CG13, §XII.3, p365]**

On se place dans le plan affine.
Définition d'un polygone.

Exemple 2. Le groupe des isométries du plan préservant un polygone régulier à n côtés de centre O contient :

i) n rotations de centre O et d'angle $\frac{k2\pi}{n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,
ii) n symétries d'axe 2 sommets opposés ou 2 milieux de côtés opposés si n est pair, 1 sommet et le milieu du côté opposé si n est impair.

C'est le groupe diédral D_{2n}.

On se place maintenant dans un espace affine de dimension 3.
Définition d'un polyèdre.
Isométries préservant le tétraèdre régulier.

Théorème 3. $\mathrm{Isom}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *et* $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Application 4. La formule de Burnside (si G groupe fini agit lui-même par conjugaison alors $|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$) permet de montrer que l'on peut colorier les 6 faces du cube avec 3 couleurs de 57 manières différentes.

IV. Applications des groupes à la classification de coniques réelles

[Aud06, §VII.2, p228]

Définition des coniques, exemples
Par l'action de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ sur l'ensemble des coniques par $g.f = f \circ g^{-1}$, les orbites permettent de classifier les coniques

ANNEXE

Translations, homothéties, théorèmes de Thalès et de Desargues, rotations, réflexions, symétrie glissée, isométries de l'espace, groupe diédral, isoméries du tétraèdre, types de coniques

QUESTIONS

Q Est-ce une coïncidence de retrouver le groupe des isométries du tétraèdre dans celui du cube modulo 2 en quelque sorte ?

R Pour le tétraèdre, on ne peut que agir sur les sommets.
On peut inscrire deux tétraèdres réguliers dans le cube : partant d'un sommet on prend les sommets diamétralement opposés sur chaque face adjacente. Alors une isométrie du cube envoie tous les points d'un des tétraèdre soit sur lui même, soit sur l'autre tétraèdre. Dans les deux cas $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on retrouve les permutations $\mathfrak{S}_4$.

Q Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathcal{C}) = \mathrm{Isom}(\mathrm{conv}(\mathcal{C}))$.

R Dans un sens, utiliser la conservation des barycentres.

Q Autre définition de l'ellipse de Steiner ?

R Ellipse de rayon maximal parmi les ellipses inscrites dans le triangle ?

Q Soit $h = h(O, \lambda)$ et $h' = h(O, \lambda')$. Que vaut hh' ?

R Si $\lambda\lambda' = 1$, $hh' = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{At_{\vec{u}}(A)}$ pour tout A. Prenant $A = O$, on obtient $\vec{u} = (1 - \lambda')\vec{OO'}$.
Sinon, $h \vec{\circ} h' = \lambda'\lambda\,\mathrm{Id}$ donc $hh' = h(O'', \lambda\lambda')$. Montrons que O, O', O'' sont colinéaires. Pour cela, on part de $\vec{O'O''}$, et on obtient $(1 - \lambda\lambda')\vec{O'O''} = (1 - \lambda)\vec{OO'}$.

BIBLIOGRAPHIE

[Aud06] M. Audin : *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.

[CG13] P. Caldero et J. Germoni : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[Rom17] J.-E. Rombaldi : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.