182 APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES À LA GÉOMÉTRIE.

I. Géométrie euclidienne du plan [Rom17, Ch4, p101]

I. A. Généralités [Rom17, Ch4, p101]

Représentation du plan euclidien $\mathcal{P}$ par les complexes
Identifications points, affixe, produit scalaire, déterminant, condition d'alignement des points, équation d'une droite
Lien entre argument et angle orienté
Exemples : équations de droites / de cercles
Équivalence entre la distance et du module

I. B. Applications [Aud06, §I.5, p29]

Barycentres :
Définition barycentre, isobarycentre : exemple du milieu d'un segment, de la paramétrisation d'un segment comme barycentres
Associativité du barycentre, application au centre de gravité
Théorème de Gauss-Lucas

Proposition 1. [Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre] *On définit par récurrence une suite* $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *par* $P^{(0)} = (z_1^{(0)},\dots,z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$ *et* $P^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)}+z_2^{(k)}}{2},\dots,\frac{z_{n-1}^{(k)}+z_n^{(k)}}{2},\frac{z_n^{(k)}+z_1^{(k)}}{2}\right)$ *pour* $k\in\mathbb{N}$.
Alors $P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (g,g,\dots,g)$ *où* $g = \mathrm{Isobar}(z_1^{(0)},\dots,z_n^{(0)})$.

Critère de cocyclicité : théorème de Ptolémée, de l'angle moitié
Aire maximale d'un triangle, caractérisation des triangles équilatéraux

II. Transformations du plan

II. A. Autour des similitudes [Tau00, §7.2, p108] [Aud06, §II.3, p89]

Isométries : isomorphisme $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U}$. Forme analytique des isométries
Translations, homothéties $\to$ similitude = composée
Similitudes directes, indirectes
Application : définition d'un polygone convexe

II. B. Inversions [Rom17, §4.8, p120]

Définition, expression en terme de nombre complexes, involution du plan privé d'un point, cercle des points fixes

II. C. Autour des homographies [Aud06, ChVI.5, p194]

Isomorphisme entre $\mathbb{C}\cup\{+\infty\}$ et la sphère de Riemann S
Définitions, groupe des bijections de S
Birapport, propriété de conservation par une homographie

III. Applications des nombres complexes à la géométrie de l'espace : les quaternions [CG13, ChVII, p232]

Groupe des quaternions sous forme matricielle, conjugué, norme d'un quaternion, produit scalaire associé, la base $(1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})$ est orthonormée, $\mathbb{H} = \mathbb{I}\oplus^{\perp}\mathbb{R}$
On définit $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) = \{h\in\mathbb{H} \,|\, N(h)=1\}$

Théorème 2. *On a* $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

ANNEXE

Transformations de base, sphère de RIEMANN

SPEECH

Utiliser les nombres complexes pour faire de la géométrie permet notamment d'utiliser une structure de corps qui enrichit la structure d'espace vectoriel.

QUESTIONS

Q Montrer que $Z(H) = \mathbb{R}.1$.

R On prend $h \in Z(H)$, disons $h = w.1+x.i+y.j+z.k$. On a $hi = ih$, ce qui donne $y = z = 0$, puis en utilisant $jh = hj$, on obtient de même $w = 0$.

Q Pourquoi $\mathbb{R}.1$ et les quaternions imaginaires purs sont-ils orthogonaux ?

R Le produit scalaire est lié à la trace ($1, i, j, k$ forme une base orthonormée).
Ou : on a $\langle 1 \mid i \rangle = 1\bar{i} + i\bar{1} = 0, \ldots$

Q Montrer que les deux définitions données du biraport coïncident.

R Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. On a :

$$[a, b, c, d] = \frac{a-c}{b-c}\frac{b-d}{a-d} = \frac{ab-ad-bc+cd}{ab-bd-ac+cd} = \frac{(c-a)d+ab-bc)}{(c-b)d+ab-ac}$$

Soit donc $M = \begin{pmatrix} c-a & ab-bc \\ c-b & ab-ac \end{pmatrix}$. On a $\det(M) = ... = (c-a)(a(b-c)+b(c-b))$.
On regarde $h_M : z \longmapsto \frac{a-c}{b-c}\frac{b-z}{a-z}$ l'homographie associée.

BIBLIOGRAPHIE

[Aud06] M. AUDIN : *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.

[CG13] P. CALDERO et J. GERMONI : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.

[Tau00] P. TAUVEL : *Cours de géométrie*. Dunod, 2000.