181 BARYCENTRES DANS UN ESPACE AFFINE RÉEL DE DIMENSION FINIE, CONVEXITÉ. APPLICATIONS.

Soit $(\mathcal{E}, E)$ un $\mathbb{R}$-espace affine.

I. Définitions, coordonnées barycentriques

I. A. Premières propriétés [Aud06, §I.5, p29]

Définition barycentre, isobarycentre : exemple du milieu d'un segment, de la paramétrisation d'un segment comme barycentres
Associativité du barycentre, application au centre de gravité

Proposition 1. [Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre] *On définit par récurrence une suite $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $P^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$ et $P^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)}+z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)}+z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)}+z_1^{(k)}}{2}\right)$ pour $k \in \mathbb{N}$.*
Alors $P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (g, g, \dots, g)$ où $g = \operatorname{Isobar}(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$.

I. B. Barycentres et structure affine [Tau00, Ch3, p27]

Une fonction est affine si et seulement si elle conserve les barycentres
Un sous-espace est affine si et seulement si il contient tous les barycentres
Description de l'espace affine défini par une partie de $\mathcal{E}$

I. C. Coordonnées barycentriques [Aud06, ChI/V, p42/150]

Repère affine, coordonnées barycentriques, uniques à renormalisation près
Lien entre repère affine et base vectorielle de $\mathcal{E}_a$ où a est le premier point du repère affine
Exemples du centre de gravité d'un triangle
Application : la seule application affine qui fixe $n+1$ points indépendants de $\mathcal{E}$ est l'identité

Proposition 2. *Soit A, B, C trois points non alignés. Les coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère affine (A, B, C) sont proportionnelles aux aires orientées des triangles MBC, MCA, MAB. Plus précisément*

$$\mathcal{A}(MBC)\overrightarrow{MA} + \mathcal{A}(MCA)\overrightarrow{MB} + \mathcal{A}(MAB)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Théorèmes de Ménélaüs et de Ceva

Proposition 3. *Soient $k+1$ points $A_0, \dots, A_k$ affinement libres, de coordonnées dans un repère affine $(a_{ij})_{0\le i\le n, 0\le j\le k}$. Alors $M = (x_0, \dots, x_n) \in \operatorname{Aff}(A_0, \dots, A_k)$ si et seulement si $\det(A|M) = 0$.*

Exemple 4. Dans un repère affine du plan, A, B, C sont alignés si et seulement si $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$.

II. Convexité

On suppose E euclidien.

II. A. Définitions et enveloppe convexe [Aud06, §I.6, p31] [Gou08, §1.5, p54]

Partie convexe
Exemples des intervalles, d'une boule convexe, intersection de convexe
Conservation des convexes par une application affine ou par l'image réciproque
Exemples : hyperplans comme noyaux d'une application affine, hyperplans d'appuis, demis-espaces
Enveloppe convexe d'une partie
Exemples : intersection de semis-plans $\to$ polytopes
Un convexe est stable par barycentres à coefficients positifs. Description de l'enveloppe convexe par barycentres à coefficients positifs
Application : l'enveloppe convexe d'une partie finie de X est compacte

Théorème 5. [Théorème de Carathéodory] *Soit X un espace affine de dimension finie n. Alors pour tout $S \subset X$, $\operatorname{conv}(S)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'au plus $n+1$ points de S. Autrement dit :*

$$\operatorname{conv}(S) = \left\{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \,|\, (x_i, \lambda_i)_{1\le i\le n+1} \in (S \times \mathbb{R}_+)^{n+1}\right\}$$

Corollaire 6. *Soit S un compact de X euclidien. Alors $\operatorname{conv}(S)$ est compact.*

Application 7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Notons $(C_j)_{1\le j\le n}$ ses colonnes. L'équation diophantienne $MX = 0$ admet une solution non nulle dans $\mathbb{N}^n$ si et seulement si $0 \in \operatorname{conv}(\{C_1, \dots, C_n\})$.

II. B. Topologie des convexes [Tau00, §5.4, p78]

S convexe implique $\overline{S}$ et S° convexes
S d'intérieur non vide si et seulement si $\operatorname{Aff}(S) = \mathcal{E}$.

S convexe compact implique $S = \mathrm{conv}(\partial S)$

II. C. Points extrémaux d'un convexe, sommets

[Tau00, §5.8, p86] [Gou09, §4.2, p180]

Points extrémaux, définition équivalente : la partie privée du point reste convexe
Exemples des points extrémaux de la boule fermée : la frontière
Polygones/polyèdres ... les sommets sont les points extrémaux
Théorème de Krein-Milman

ANNEXE

Tout un tas de dessins ...

QUESTIONS

Q Quel est le lien, s'il y en a, entre les polytopes et les polyèdres ?

R Le polyèdre a un intérieur non vide en général. C'est juste une question de convention.

Q Qu'est-ce qu'une forme affine ?

R C'est la donnée d'une forme linéaire et de coordonnées barycentriques.

Q Soit C un convexe de X affine, avec $\dim(X) < +\infty$. Soit $f : X \longrightarrow X$ affine telle que $f(C) = C$. Montrer que f permute les points extrémaux.

Q Soit A, B, C un triangle et M un point du triangle ABC, de coordonnées (α, β, γ) dans (A, B, C). Exprimer α, β, γ en fonction d'aires de certains triangles.

R On a $\alpha \vec{AM} + \beta \vec{BM} + \gamma \vec{CM} = \vec{0}$. On a $\mathcal{A}(AMC) = \frac{1}{2}\det(\vec{MA}, \vec{MC})$ et

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\alpha \vec{AM} + \beta \vec{BM} + \gamma \vec{CM}, \vec{CM}) = \alpha \mathcal{A}(AMC) - \beta \mathcal{A}(BMC) \\ &= -\alpha \mathcal{A}(AMB) + \gamma \mathcal{A}(BMC) = \beta \mathcal{A}(AMB) - \gamma \mathcal{A}(AMC) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}(AMB) = \gamma, \mathcal{A}(BMC) = \alpha, \mathcal{A}(AMC) = \beta$.

BIBLIOGRAPHIE

[Aud06] M. Audin : *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.

[Gou08] X. Gourdon : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Gou09] X. Gourdon : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Tau00] P. Tauvel : *Cours de géométrie*. Dunod, 2000.