171 FORMES QUADRATIQUES RÉELLES. CONIQUES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Formes quadratiques réelles

[Rom17, Ch15, p463] [De 11, §X.2, p181]

I. A. Définitions générales

Forme quadratique, forme polaire associée
Exemple de $M \longmapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Vecteurs orthogonaux, noyau d'une forme quadratique, lien avec le noyau de la matrice de la forme quadratique, rang, forme dégénérée
Exemples

I. B. Propriétés de réduction

THÉORÈME 1. [RÉDUCTION DE GAUSS] *Pour toute forme quadratique réelle q sur $\mathbb{R}^n$, il existe, si $r = \mathrm{rg}(q)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}^*$ et $\ell_1, \ldots, \ell_r$ des formes linéaires indépendantes tels que $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i$.*

COROLLAIRE 2. *La forme polaire associée à q est alors $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i(x)\ell_i(y)$.*

EXEMPLE 3. $q(x,y,z) = -x^2-y^2-z^2+2(xy+xz+yz) = -(x-y-z)^2+(y+z)^2+(y-z)^2$

COROLLAIRE 4. *Il existe une base orthogonale pour q. La matrice de q dans cette base est alors $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où $\lambda_i = 0$ pour $i > r$.*

COROLLAIRE 5. *Notons $s = \mathrm{card}(\{i \mid \lambda_i > 0\})$ et $t = \mathrm{card}(\{i \mid \lambda_i < 0\})$. Alors la matrice de q dans une certaine base est $\mathrm{diag}(I_s, -I_t, 0_{n-(s+t)})$.*

Forme (définie) positive, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour une forme quadratique positive

PROPOSITION 6. [LOI D'INERTIE DE SYLVESTER]

- *s et t sont uniques (ne dépendent par de la décomposition de GAUSS choisie) et déterminés par :*

$$s = \max\{\dim(F) \mid F \in \mathcal{P}\} \qquad t = \max\{\dim(F) \mid F \in \mathcal{N}\}$$

où $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{N}$) désigne l'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ sur lesquels la restriction de q est définie positive (resp. définie négative). De plus $r = s+t$.
- *Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\mathbb{R}^n$ orthogonale pour q. Alors s est le nombre de vecteurs $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que $q(e_i) > 0$ et t est le nombre de vecteurs $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que $q(e_i) < 0$.*

DÉFINITION 7. (s,t) s'appelle la signature de q.

EXEMPLE 8. La signature de $M \longmapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ est $(n(n+1)/2, n(n-1)/2)$.

COROLLAIRE 9. [RÉDUCTION D'UNE FORME QUADRATIQUE RÉELLE] *Il existe des formes linéaires $(\ell_i)_{1\leq i\leq r}$ indépendantes telles que $q = \sum_{i=1}^s \ell_i^2 - \sum_{i=s+1}^r \ell_i^2$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe s,t uniques et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $PAP^\top = \mathrm{diag}(I_s, -I_t, 0_{n-(s+t)})$.*

THÉORÈME 10. [THÉORÈME SPECTRAL] *[Aud06, §VII.7.8]* *Soient q, q' des formes quadratiques avec q définie positive. Alors il existe une base orthonormée pour q et orthogonale pour q'.*

I. C. Applications

[Rou99, §5.5, p327] [CG13, §V.D, p197]

EXEMPLE 11. La différentielle seconde est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

LEMME 12. *Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $V \in \mathcal{V}(A_0)$ et $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\forall A \in V, A = g(A)^\top A_0 g(A)$.*

THÉORÈME 13. [LEMME DE MORSE] *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.*
Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \varphi(x)_1^2 + \cdots + \varphi(x)_p^2 - \varphi(x)_{p+1}^2 - \cdots - \varphi(x)_n^2$ au voisinage de 0.

REMARQUE 14. Un polynôme homogène de degré 2 est une forme quadratique.

PROPOSITION 15. [FORME DE HANKEL] *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et $x_1, \ldots, x_t$ ses racines distinctes, de multiplicité $m_1, \ldots, m_t$. On définit $s_k = \sum_{\ell=1}^t m_\ell x_\ell^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis on pose*

$$\forall (X_0, \ldots, X_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, s(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{0\leq i,j\leq n-1} s_{i+j} X_i X_j$$

Alors $s_{\mathbb{R}}$ (la restriction de s à $\mathbb{R}^n$) est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de signature (p,q) où $p+q = t$ et $p-q$ est le nombre de racines réelles de P.

II. Application à l'étude des coniques

II. A. Vocabulaire [Aud06, §VII.1, p221]

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

DÉFINITION 16. Une conique $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points (x,y) de $\mathcal{P}$ satisfaisant l'équation :

$$(\mathcal{E}) \quad ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

où $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ sont des paramètres, avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.
$q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ est la forme quadratique associée à $\mathcal{E}$, supposée non nulle, et $\ell(x,y)=dx+ey$ est la forme linéaire associée à $\mathcal{E}$.

REMARQUE 17. q ne dépend pas du point d'origine O choisi.

DÉFINITION 18. Un point Ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}$ si dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, la partie linéaire de l'équation définissant $\mathcal{C}$ est nulle.
$\mathcal{C}$ est dite à centre si elle admet un unique centre de symétrie.

PROPOSITION 19. *$\mathcal{C}$ est à centre si et seulement si q est non dégénérée.*

EXEMPLE 20. $\Omega=(a,b)$ est l'unique centre de la conique définie par $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Une conique de type $ax^2+dx+ey+f=0$ n'est pas à centre.

PROPOSITION 21. *Si $\mathcal{C}$ est à centre, il existe un repère orthonormé de $\mathcal{P}$, d'origine Ω, dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ est du type $\alpha x^2+\beta y^2=\gamma$ avec $\alpha,\beta\neq 0$.*

DÉFINITION 22. On définit $Q(x,y,z)=q(x,y)+\ell(x,y)z+fz^2$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ appelée forme homogénéisée de q. $\mathcal{C}$ est dite propre si Q est non dégénérée.

EXEMPLE 23. Les coniques propres sont de « vraies » coniques : ce ne sont pas des droites.

II. B. Classification [Aud06, §VII.2, p228]

THÉORÈME 24. [CLASSIFICATION DES CONIQUES PROPRES] *On peut classifier les coniques propres en fonction des signatures de Q et de q :*

$\mathrm{sgn}(Q)$	$\mathrm{sgn}(q)$	*Classe*	*Exemple*
$(3,0)/(0,3)$	$(2,0)/(0,2)$	$\varnothing$	$x^2+y^2=-1$
$(2,1)/(1,2)$	$(2,0)/(0,2)$	*ellipse*	$x^2+y^2=1$
$(2,1)/(1,2)$	$(1,1)$	*hyperbole*	$x^2-y^2=1$
$(2,1)/(1,2)$	$(1,0)/(0,1)$	*parabole*	$x^2+y=0$

THÉORÈME 25. [CLASSIFICATION DES CONIQUES IMPROPRES]

$\mathrm{sgn}(Q)$	$\mathrm{sgn}(q)$	*Classe*	*Exemple*
$(2,0)/(0,2)$	$(2,0)/(0,2)$	*point*	$x^2+y^2=0$
$(2,0)/(0,2)$	$(1,0)/(0,1)$	$\varnothing$	$x^2=-1$
$(1,1)$	$(1,1)$	*droites sécantes*	$x^2-y^2=0$
$(1,1)$	$(1,0)/(0,1)$	*droites parallèles*	$x^2=1$
$(1,0)/(0,1)$	$(1,0)/(0,1)$	*droite double*	$x^2=0$

II. C. Point de vue géométrique [Rom17, Ch16, p497] [Aud06, §VII.2, p232]

THÉORÈME 26. *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre non vide qui n'est pas un cercle. Alors il existe un point $F\in\mathcal{P}$ appelé foyer, une droite $\mathcal{D}$ ne contenant pas F, appelée directrice et un réel $e>0$ appelé excentricité tels que $\mathcal{C}=\{M\in\mathcal{P}\,|\,d(M,F)=ed(M,\mathcal{D})\}$.*
Si $e<1$, $\mathcal{C}$ est une ellipse. Si $e=1$, $\mathcal{C}$ est une parabole. Enfin si $e>1$, $\mathcal{C}$ est une parabole.

DÉFINITION 27. La perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F est appelée axe focal. C'est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

THÉORÈME 28. *Dans le repère $(F,\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i}$ unitaire dirige l'axe focal et $\vec{j}$ unitaire dirige $\mathcal{D}$, l'équation de $\mathcal{C}$ est, en notant p l'abscisse de $\mathcal{D}$:*

$$(1-e^2)x^2+y^2+2pe^2x-p^2e^2=0$$

PROPOSITION 29. *Si $\mathcal{C}$ est à centre ($e\neq 1$), le centre a pour coordonnées $(-\frac{pe^2}{1-e^2}/,0)$ dans le repère $(F,\vec{i},\vec{j})$.*
Par symétrie, $\mathcal{C}$ est aussi la conique caractérisée par le foyer F' et la directrice $\mathcal{D}'$, symétriques de F et $\mathcal{D}$ par rapport au centre.

PROPOSITION 30. [DÉFINITION BIFOCALE DES CONIQUES PROPRES À CENTRE]

- *Si $\mathcal{C}$ est une ellipse (qui n'est pas un cercle), alors $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$ pour un réel $2a$ appelé grand axe de $\mathcal{C}$,*
- *Si $\mathcal{C}$ est une hyperbole, alors $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}$ pour un réel $2a$ appelé grand axe de $\mathcal{C}$.*

ANNEXE

Différentes coniques et leurs éléments associés : foyers, directrices ...

QUESTIONS

Q Quelles sont les orbites fermées de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour l'action de congruence ? (voir [CG13]).

R Montrons que 0 est toujours dans l'adhérence d'une orbite (et alors seule $\{0\}$ est une orbite fermée). On prend pour cela une suite de matrices qui tend vers 0 ...

Q Réduire $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt$.

R Par exemple $q(x, y, z, t) = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2 + (y+z-t)^2 - (z-y-t)^2\right]$. Ainsi q est de signature $(2, 2)$.

Q Montrer que $M \longmapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ est une forme quadratique. Quelle est sa signature ?

Q Que se passe-t-il dans le cas d'une forme quadratique définie positive avec la réduction de GAUSS ?

R On obtient la signature $(n, 0)$.

Q Montrer que les mineurs principaux d'une matrice définie positive sont tous non nuls (question similaire à la précédente).

Q Montrer que $\det(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})) = \mathbb{R}_+^*$.

Q Par quelles opérations le cône isotrope est-il stable ? Contient-il des sous-espaces vectoriels ? Calculer la dimension maximale d'un sous-espace contenu dans le cône.

R Par multiplication par un scalaire (surtout pas par somme !). Il contient des droites (multiplication par un scalaire), il contient $\ker E$.
Si q est non dégénérée, prenons $F \subset C_q$ le cône isotrope. On a $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, d'où $F \subset F^\perp$ puisque si $x \in F$, alors $\forall y \in F$, $\varphi(x, y) = 0$ en développant $0 = q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y) = 2\varphi(x, y)$. Ainsi $\dim(F) \leq n/2$.
Dans le cas où q n'est pas dégénérée, écrivons $E = \ker q \oplus G$. q_G est non dégénérée, donc on applique ce qui précède et $\dim(F \cap G) \leq \dim(G)/2$ si $F \subset C_q$. Puis $\dim(F \cap \ker q) \leq \dim(\ker(q))$ donc $\dim(F) \leq \dim(G)/2 + \dim(\ker q) \leq \frac{n - \dim(\ker q)}{2}$.

Q Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$, et F un sous-espace vectoriel de dimension n, q une forme quadratique non dégénérée sur E. On suppose q nulle sur F. Quelle est la signature de q ?

R La signature est (n, n). En prenant une base de F, on peut compléter en une base telle que la matrice à une forme par blocs 2×2 particulière, et on peut alors la réduire ...

BIBLIOGRAPHIE

[Aud06] M. AUDIN : *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.

[CG13] P. CALDERO et J. GERMONI : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[De 11] C. DE SEGUINS PAZZIS : *Invitation aux formes quadratiques*. Calvage et Mounet, 2011.

[Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.