170 FORMES QUADRATIQUES SUR UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE. ORTHOGONALITÉ, ISOTROPIE. APPLICATIONS.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.

I. Généralités sur les formes quadratiques

[Rom17, Ch15, p463] [De 11, ChI–IV, p6]

I. A. Formes bilinéaires et formes quadratiques

Forme bilinéaire (symétrique), matrice d'une forme bilinéaire dans une base, expression en produit matriciel
Forme quadratique, forme polaire associée. Matrice d'une forme quadratique, expression en produit matriciel
Exemples : polynômes homogènes de degré 2, exemple de $M \longmapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En fait si on fixe une base, q est un polynôme homogène de degré 2 explicité par la matrice de q dans la base
Exemples

PROPOSITION 1. *Soit q une forme quadratique. L'ensemble des matrices représentant q dans des bases de E est exactement l'une des orbites de l'action par congruence sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P,S) & \longmapsto & PSP^\top \end{array}$$

DÉFINITION 2. [DISCRIMINANT]
On définit le discriminant de $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par $\overline{\det(S)} \in \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$ si S est inversible, 0 sinon.

PROPOSITION 3. *Deux matrices congruentes ont même discriminant. Ainsi on peut donc définir le discriminant d'une forme quadratique.*

I. B. Objets associés aux formes quadratiques

Vecteurs orthogonaux, propriétés, noyau d'une forme quadratique, lien avec le noyau de la matrice de la forme quadratique, rang, forme dégénérée
Vecteurs isotropes, cône isotrope, orthogonal
Exemples
Théorème d'existence d'une base formée de vecteurs isotropes sous conditions

II. Réduction des formes quadratiques

[Rom17, Ch15, p463] [De 11, ChV.3, p93] [CG13, ChV.D, p97]

THÉORÈME 4. [RÉDUCTION DE GAUSS]
Pour toute forme quadratique réelle q sur E, il existe un entier r, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^*$ et $\ell_1, \dots, \ell_r$ des formes linéaires indépendantes tels que $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i$.

COROLLAIRE 5. *La forme polaire associée à q est alors $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i(x)\ell_i(y)$.*

EXEMPLE 6. $q(x,y,z) = -x^2-y^2-z^2+2(xy+xz+yz) = -(x-y-z)^2+(y+z)^2+(y-z)^2$

COROLLAIRE 7. *Il existe une base orthogonale pour q. La matrice de q dans cette base est alors $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_i = 0$ pour $i > r$. En particulier $r = \mathrm{rg}(q)$ et $\ker(q) = \cap_{i=1}^r \ker \ell_i$.*

Regardons maintenant plus en détail le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

COROLLAIRE 8. *Notons $s = \mathrm{card}(\{i \,|\, \lambda_i > 0\})$ et $t = \mathrm{card}(\{i \,|\, \lambda_i < 0\})$. Alors la matrice de q dans une certaine base est $\mathrm{diag}(I_s, -I_t, 0_{n-(s+t)})$.*

Forme (définie) positive, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour une forme quadratique positive

PROPOSITION 9. [LOI D'INERTIE DE SYLVESTER]

- *s et t sont uniques (ne dépendent par de la décomposition de GAUSS choisie) et déterminés par :*

$$s = \max\{\dim(F) \,|\, F \in \mathcal{P}\} \qquad t = \max\{\dim(F) \,|\, F \in \mathcal{N}\}$$

  où $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{N}$) désigne l'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ sur lesquels la restriction de q est définie positive (resp. définie négative). De plus $r = s + t$.
- *Soit $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de $\mathbb{R}^n$ orthogonale pour q. Alors s est le nombre de vecteurs $(e_i)_{1\le i\le n}$ tels que $q(e_i) > 0$ et t est le nombre de vecteurs $(e_i)_{1\le i\le n}$ tels que $q(e_i) < 0$.*

DÉFINITION 10. (s,t) s'appelle la signature de q.

EXEMPLE 11. La signature de $M \longmapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ est $(n(n+1)/2, n(n-1)/2)$.

Application 12. **[Forme de Hankel]**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et $x_1, \dots, x_t$ ses racines distinctes, de multiplicité $m_1, \dots, m_t$.
On définit $s_k = \sum_{\ell=1}^t m_\ell x_\ell^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis on pose

$$\forall (X_0, \dots, X_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, s(X_1, \dots, X_n) = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} X_i X_j$$

Alors $s_{\mathbb{R}}$ (la restriction de s à $\mathbb{R}^n$) est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de signature (p, q) où $p + q = t$ et $p - q$ est le nombre de racines réelles de P.

III. Classification des formes quadratiques

[Rom17, Ch15, p463] [CG13, ChV.B, p179] [De 11, ChV/VI, p87/100]

Remarque 13. Classifier les formes quadratiques revient à chercher les orbites l'action par congruence l'action.

Soit q une forme quadratique sur E de rang r.

III. A. Sur $\mathbb{C}$

Théorème 14. **[Classification sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{K}$ algébriquement clos)]**
La matrice de q dans une certaine base est $J_r = \mathrm{diag}(I_r, 0_{n-r})$. Dans cette base on a donc $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2$.

Corollaire 15. *Deux formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel sont congruentes si et seulement si elles ont même rang.*

Application 16. Il y a $n + 1$ classes de congruences de formes quadratiques sur E.

III. B. Sur $\mathbb{R}$

Notons (s, t) la signature de q.

Théorème 17. **[Classification sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$]**
La matrice de q dans une certaine base est $\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$. Dans cette base on a donc $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2$.

Corollaire 18. *Deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sont congruentes si et seulement si elles ont même signature.*

Application 19. Il y a $r + 1$ classes de congruences de formes quadratiques de rang r sur E.

III. C. Sur $\mathbb{F}_q$

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ où $q = p^\ell$ pour un p premier impair et $\ell \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathbb{F}_q^2 = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q\}$ et $\mathbb{F}_q^{*2} = \mathbb{F}_q^2 \cap \mathbb{F}_q^*$.

Proposition 20. *$\mathbb{F}_q^{*2}$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathbb{F}_q^*$.*

Théorème 21. **[Classification sur $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$]**
Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$.
La matrice de q dans une certaine base est $\begin{pmatrix} I_{r-1} & & \\ & \delta & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $\delta \in \{1, \alpha\}$.

Application 22. Il y a $2n + 1$ classes de congruences de formes quadratiques sur E.

Théorème 23. **[Loi de réciprocité quadratique]**
Soient $p \neq q$ des nombres premiers impairs. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \quad \text{où} \quad \left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 24. $\left(\frac{26}{307}\right) = \left(\frac{2}{307}\right)\left(\frac{13}{307}\right) = -(-1)^{\frac{13-1}{2}\frac{307-1}{2}}\left(\frac{307}{13}\right) = -\left(\frac{8}{13}\right) = -\left(\frac{2}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) = -1$
Ainsi 26 n'est pas un carré modulo 307.

COMMENTAIRES

Autres références : [Gou09, Per96].
Attention à la caractéristique 2 qui est un cas particulier, pour lequel les résultats sont rapidement faux

QUESTIONS

Q À quoi servent les formes de HANKEL ?

R Cela permet de calculer la forme de GAUSS sans connaître les racines.

Q Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $q(x) = X^\top AX$. Trouver la forme polaire associée.

R Soit $\varphi(X,Y) = X^\top AY$. On a $A = \frac{A+A^\top}{2} + \frac{A-A^\top}{2}$. On vérifie que $\phi(X,Y) = X^\top(\frac{A+A^\top}{2})Y$ fonctionne.

Q La matrice d'une forme quadratique correspond-elle à la matrice d'une autre application ?

R On introduit les fonctions $\varphi_g : E \longrightarrow E^*, x \longmapsto \varphi(x,.)$ et $\varphi_d : E \longrightarrow E^*, x \longmapsto \varphi(.,x)$. A est alors la matrice de ces applications dans la base duale de la base associée à la matrice A.

Q $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est-elle une forme quadratique ? Quel est son rang ? Son discriminant ? Quelle est la signature si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? Sur un corps fini, à quelle matrice est-elle congruente ?

R C'est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées des matrices, donc c'est une forme quadratique.
Pour trouver son rang, soit on utilise la forme bilinéaire associée, soit on calcule sa réduction de GAUSS. On a :

$$\det = E_1E_4 - E_2E_3 = \frac{1}{4}((E_1+E_4)^2 - (E_1-E_4)^2 - (E_2+E_3)^2 + (E_2-E_3)^2)$$

Donc $\mathrm{rg}(\det) = 4$.
Par ailleurs, la matrice associée dans une bonne base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le (un) discriminant $1/16$, donc 1. Une autre manière de l'obtenir est d'utiliser la base de la réduction de GAUSS.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on aurait pour signature $(2,2)$. Sur $\mathbb{F}_q$, elle est congruente à l'identité.

Q Questions sur le plan hyperbolique.

Q Exemple concret de hessienne.

BIBLIOGRAPHIE

[CG13] P. CALDERO et J. GERMONI : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[De 11] C. DE SEGUINS PAZZIS : *Invitation aux formes quadratiques*. Calvage et Mounet, 2011.

[Gou09] X. GOURDON : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Per96] D. PERRIN : *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.

[Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.