161 DISTANCES ET ISOMÉTRIES D'UN ESPACE AFFINE EUCLIDIEN.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E.

I. Distances d'un espace affine euclidien

I. A. Définitions et premières propriétés [Aud06, ChII, p51]

On munit E d'un produit scalaire : E est un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien
Distance entre deux points de $\mathcal{E}$, c'est bien une distance (inégalité triangulaire ...)
Distance à un sous-espace affine, lien avec le projeté orthogonal

I. B. Matrice et déterminant de Gram [Gou09, §5.4, p262] [Rom17, §17.4.7, p560]

Définition 1. [Matrice et déterminant de Gram]
Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle matrice de Gram de $x_1, \ldots, x_n$ la matrice $M_G(x_1, \ldots, x_n) = (\langle x_i \mid x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ et déterminant de Gram de $x_1, \ldots, x_n$ le déterminant de la matrice de Gram, noté $G(x_1, \ldots, x_n)$.

Lemme 2. *$G(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ et $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée.*

Théorème 3. [Distance à un sous-espace vectoriel]
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie n de E, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors pour tout $x \in E$, on a $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}$.

Théorème 4. [Inégalités de Hadamard] [voir annexe]
(i) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. Alors $G(x_1, \ldots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.
(ii) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $|\det(x_1, \ldots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2$, où $\|.\|_2$ désigne la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$.
Dans les deux points, on a égalité si et seulement si la famille $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.

Application 5. Interprétation géométrique de l'inégalité de Hadamard dans $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 6. *Expression de la projection de x sur F à l'aide de matrices de Gram.*

II. Isométries d'un espace affine euclidien [Aud06, ChII, p51]

II. A. Définitions et premières propriétés [Tau06, Ch6, p91]

Isométrie vectorielle, isométrie affine, example des translations, des symétries orthogonales (par rapport à un sous-espace vectoriel F de E ou un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$) $\rightarrow$ réflexion
Groupe $\mathcal{O}(E)/\operatorname{Isom}(\mathcal{E})$ des isométries vectorielles/affines
F sous-espace vectoriel f-stable implique $F^\perp$ sous-espace vectoriel f-stable

II. B. Structure des isométries

Cas où $\mathcal{E} = \mathcal{P}$: selon le nombre de points fixes de l'isométrie, on l'écrit comme composée d'une, deux ou trois réflexions.
Les réflexions engendrent $\mathcal{O}(E), \operatorname{Isom}(\mathcal{E})$
Déplacement, anti-déplacement
Les isométries sont des bijections, $\operatorname{Isom}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe distingué, déplacements préservent les orientations de l'espace
Forme réduite des isométries affines
Réduction des isométries affines, écriture matricielle
Connexité par arcs de $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs homéomorphes
$\operatorname{Isom}^+(\mathcal{E})$ est connexe par arcs

III. Isométries en dimension 2 et 3

III. A. Classification des isométries [Gri15, §7.10, p241] [Per96, §V.5, p148]

En dimension 2, les isométries vectorielles sont les rotations et les réflexions

Proposition 7. [Étude en dimension 2]
Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a deux cas :

- *soit $u \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ et alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. u est alors la rotation d'angle θ centrée en l'origine,*
- *soit $u \notin \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ et alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. u est alors la symétrie par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$.*

Les isométries affines sont les translations, les rotations, les réflexions et les symétries glissées.
En dimension 3, les isométries vectorielles sont les réflexions, les rotations autour d'un axe et les antirotations :

PROPOSITION 8. [ÉTUDE EN DIMENSION 3]
Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

pour un $\theta \in [0, 2\pi[$ et où $\varepsilon = \pm 1$ vaut :
- *1 si $u \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^3)$ (u est alors une rotation d'angle θ autour d'une droite),*
- *-1 si $u \notin \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^3)$ (u est alors la composée d'une rotation d'angle θ autour d'une droite D puis d'une symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$).*

Classification des isométries affines selon la partie linéaire et l'existence de point fixe : réflexion, symétrie glissée, rotation, vissage, anti-rotation

III. B. Similitudes et figures stables en dimension 2 [Aud06, §III.3, p89]

Similitudes, exemples des isométries, des homothéties
Point invariant d'une similitude
Les similitudes directes conservent les angles, envoient droites et cercles sur droites et cercles

III. C. Isométries préservant des parties de $\mathcal{E}$
[Rom17, §3.4, p84] [Aud06, ChIII/V, p360] [Szp09, §8.II.6/8.III.3, p410/421]

Dans le plan : on définit le sous-groupe D_{2n} de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ des isométries préservant un polygone régulier à n sommets
D_{2n} est engendré par la symétrie et la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$, d'ordre 2 et 4, ce qui donne la liste des éléments de D_{2n}

APPLICATION 9. D_{2n} s'injecte naturellement dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$, envoyant la rotation d'angle $2\pi/n$ et la symétrie sur

$$R = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Enumérations des isométries positives, des isométries négatives du groupe diédral
Dans l'espace, regardons les isométries préservant certaines figures
Définition d'un polyèdre.
L'isobarycentre est conservé par une isométrie (en particulier un potentiel centre de symétrie)
Bijection isométries positives/négatives
Isométries préservant le tétraèdre régulier

THÉORÈME 10. $\mathrm{Isom}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *et* $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Lien entre les isométries du tétraèdre et du cube

ANNEXE

interprétation du déterminant de GRAM comme volume
rotations, vissage, anti-rotations, etc
similitudes,
groupes diédraux, cube, tétraèdre

QUESTIONS

Q Que dire de $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$?

R La matrice permute les vecteurs de la base. C'est une isométrie positive, donc une rotation. On remarque que $(1,1,1)$ est invariant donc on connaît l'axe de la droite. Puis en prenant la trace, on a $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(M) = 0$ donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Q Soit $\varphi_{\theta,b} : z \longmapsto e^{i\theta} z + b$ et $\psi_{\theta,b} : z \longmapsto e^{i\theta}\,\overline{z} + b$. Ce sont des similitudes (directes pour φ, indirectes pour ψ). Parmi celles-ci, lesquelles sont des symétries ? Des symétries glissées ?

R On regarde les conditions sur θ, b pour que ψ soit une réflexion.
On doit tomber sur $e^{i\theta}\,\overline{b} + b = 0$.

Q Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^p$. A quelle condition sur ces points existe-t-il $M_1, \ldots M_n$ tels que $A_i = \frac{M_i + M_{i+1}}{2}$ pour tout i.

R On a $M_{i+1} = 2A_i - M_i = f_i(M_i)$ où f_i est la symétrie de centre A_i fixe. Donc si l'on a M_1, on a tous les autres points et il faut que $M_1 = f_n(f_{n-1}(\ldots(M_1))) = f(M_1)$.
Or $\vec{f_i} = -\mathrm{id}$ donc si n est impair, f est une symétrie centrale de centre M_1.

BIBLIOGRAPHIE

[Aud06] M. AUDIN : *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.

[Gou09] X. GOURDON : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Gri15] J. GRIFONE : *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 5ème édition, 2015.

[Per96] D. PERRIN : *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.

[Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.

[Szp09] A. SZPRIGLAS : *Algèbre L3*. Pearson Education, 2ème édition, 2009.

[Tau06] P. TAUVEL : *Analyse complexe pour la Licence 3*. Dunod, 2006.