160 ENDOMORPHISMES REMARQUABLES D'UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN (DE DIMENSION FINIE).

Soit $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\|.\|$ la norme issue du produit scalaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Endomorphismes d'un espace euclidien [Rom17, Ch22, p697]

I. A. Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 1. [Adjoint d'un endomorphisme]
Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle$$

u^* est appelé adjoint de u.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $S = (\langle e_i \mid e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$. Si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, alors $M_{\mathcal{B}}(u^*) = S^{-1} A^\top S$.*
En particulier si $\mathcal{B}$ est orthonormée, $M_{\mathcal{B}}(u^*) = A^\top$.

Proposition 3. [Propriétés de l'adjoint]
Pour $v, w \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
(i) $(v^*)^* = v$,
(ii) $(v \circ w)^* = w^* \circ v^*$,
(iii) $\ker(v^*) = \mathrm{Im}(v)^\perp$ *et* $\mathrm{Im}(v^*) = \ker(v)^\perp$,
(iv) $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(v^*)$,
(v) Si F est un sous-espace vectoriel stable par v, alors $F^\perp$ est stable par v^*,
(vi) $|||u^*||| = |||u|||$.

I. B. Exemples d'endomorphismes remarquables

Définition 4. [Endomorphisme orthogonal]
u est un endomorphisme orthogonal (ou isométrie) de E si $u^* = u^{-1}$, autrement dit si u conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Proposition 5. *$v : E \longrightarrow E$ est orthogonale si et seulement si v est linéaire et conserve la norme.*

Exemple 6.
- Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ sont des endomorphismes orthogonaux. Ce sont les seuls en dimension 1,
- les rotations et les symétries orthogonales sont des isométries,
- les valeurs propres d'une isométrie ne peuvent être que ± 1.

Proposition 7. *u est une isométrie de E si et seulement si u est inversible et $u^* = u^{-1}$.*
Dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E, si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, on a $A^\top = A^{-1}$.

Définition 8.
- On dit que u est symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$, ou encore si

$$\forall x, y \in E, \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle$$

  On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.
- On dit que u est anti-symétrique si $u^* = -u$. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Exemple 9. $u + u^* \in \mathcal{S}(E)$. Un projecteur orthogonal est symétrique.

Définition 10. u est dit normal si $u^* u = u u^*$.

Exemple 11. Un endomorphisme auto-adjoint, antisymétrique ou orthogonal est normal.

Proposition 12. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$. On a les caractérisations matricielles des endomorphismes remarquables vus précédemment :*

u	*définition*	$M_{\mathcal{B}}(u^*)$
symétrique	$u^* = u$	$A^\top = A$
anti-symétrique	$u^* = -u$	$A^\top = -A$
orthogonal	$u^* = u^{-1}$	$A^\top A = I$
normal	$u^* u = u u^*$	$A^\top A = A A^\top$

II. Endomorphismes normaux [Rom17, Ch22, p697] [Gou09, §5.3, p258]

Dans cette partie u désigne un endomorphisme normal ($u^* u = u u^*$).

Proposition 13. *On a $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ pour tout $x \in E$.*

Application 14. Les valeurs propres (complexes) de u sont des racines de module 1.

Lemme 15. *Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.*

Lemme 16. *Il existe un sous-espace vectoriel stable par u de dimension 1 ou 2.*

Proposition 17. *Supposons $n = \dim(E) = 2$. Alors :*
- *soit u a une valeur propre réelle, et alors u est diagonalisable dans une b.o.n.,*
- *soit la matrice de u dans une b.o.n. est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.*

Théorème 18. [Réduction des endomorphismes normaux]
Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_r \end{pmatrix}$$

où $p + 2r = n$, $(\lambda_i)_{1\le i\le p} \in \mathbb{R}^p$ et pour $1 \le k \le r$, $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ avec $b_k \neq 0$.

Application 19. [Réduction d'un endomorphisme antisymétrique]
Supposons u antisymétrique. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_r \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad 2r \le n \quad \text{et} \quad R_k = \begin{pmatrix} 0 & -b_k \\ b_k & 0 \end{pmatrix}$$

III. Endomorphismes auto-adjoints

III. A. Premières propriétés

[Rom17, Ch22, p697] [AK02, Ch7, p135]

Proposition 20. *$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.*

Définition 21. u est dit symétrique positif (resp. défini positif) s'il est symétrique avec $\langle x \mid u(x)\rangle \ge 0$ pour tout $x \in E$ (resp. $\langle x \mid u(x)\rangle > 0$ pour $x \in E\backslash\{0\}$). On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. définis positifs).

Exemple 22. La matrice du produit scalaire dans une base de E est définie positive.

Proposition 23. *On a $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$ pour $u \in \mathcal{S}(E)$, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ pour $u \in \mathcal{S}^+(E)$ et $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ pour $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.*

Lemme 24. *Si $\lambda \neq \mu$, les sous-espaces propres associés $E_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et $E_\mu = \ker(u - \mu\,\mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux.*

Proposition 25. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n \ge p$ telle que $\mathrm{rg}(A) = p$ (ou encore $\ker(A) = \{0\}$). Alors $A^\top A \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.*

Application 26. [Moindres carrés]
Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche un vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|b - Ax\|_2 = \inf_{y\in\mathbb{R}^p} \|b - Ay\|_2$.
(i) Il existe toujours une solution au problème,
(ii) x est solution si et seulement si $A^\top Ax = A^\top b$,
(iii) Si $n \ge p$ et $\mathrm{rg}(A) = p$, $A^\top A$ est inversible et il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure, à diagonale positive, telle que $A^\top A = BB^\top$, et alors $x = (BB^\top)^{-1}A^\top b$ est une solution.

III. B. Autour du théorème spectral

[Rom17, Ch22, p697]

Théorème 27. [Théorème spectral]
Tout endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ est diagonalisable dans une b.o.n.

Corollaire 28. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top AP$ soit diagonale.*

Corollaire 29. *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors $u \in \mathcal{S}^+(E)$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.*

Application 30. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \rho(A)$.

Application 31. Pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Théorème 32. $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

IV. Endomorphismes orthogonaux

IV. A. Propriétés et réductions

[Rom17, Ch22, p697]

Proposition 33. *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.*
- $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$,
- $\det(u) = \pm 1$. *En particulier u est inversible.*

Proposition 34. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
(i) Si $u \in \mathcal{O}(E)$, u transforme toute b.o.n. en une b.o.n.,
(ii) $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si u transforme une b.o.n. en une b.o.n..

Théorème 35. [Réduction des endomorphismes orthogonaux]
Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_{p_1} & & & & \\ & -I_{p_2} & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_r \end{pmatrix}$$

où $p_1 + p_2 + 2r = n$ et pour $1 \leq k \leq r$, $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ pour un $\theta_k \notin \pi\mathbb{Z}$.

IV. B. Structure de groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

[Per96, §V.4/ChVI, p125/141]

Proposition 36. *$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

Définition 37. Soit u une symétrie orthogonale. On note $E^+ = \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et $E^- = \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ qui vérifient $E = E^+ \oplus E^-$. Si $\dim E^- = 1$, on dit que u est une réflexion. Si $\dim E^- = 2$, on dit que u est un renversement.

Théorème 38. [Générateurs de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$]
- *$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, A est produit d'au plus n réflexions.*
- *Pour $n \geq 3$, $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, si $A \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, A est produit d'au plus n renversements.*

IV. C. Etude en dimensions 2 et 3

[Gri15, §7.10, p241] [Per96, §V.5, p148]

Proposition 39. [Étude en dimension 2]
Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a deux cas :
- *soit $u \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ et alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. u est alors la rotation d'angle θ centrée en l'origine,*
- *soit $u \notin \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ et alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. u est alors la symétrie par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$.*

Proposition 40. [Étude en dimension 3]
Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

pour un $\theta \in [0, 2\pi[$ et où $\varepsilon = \pm 1$ vaut :
- *1 si $u \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^3)$ (u est alors une rotation d'angle θ autour d'une droite),*
- *-1 si $u \notin \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^3)$ (u est alors la composée d'une rotation d'angle θ autour d'une droite D puis d'une symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$).*

IV. D. Topologie du groupe orthogonal

[CG13, CHVI, p201] [Rom17, Ch22.3, p697]

Proposition 41. *$\mathcal{O}(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.*

Proposition 42. *Les composantes connexes de $\mathcal{O}(E)$ sont les fermés $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^-(E)$.*

Théorème 43. [Décomposition polaire]
L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}$ *est un homéomorphisme.*

Application 44. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est le seul sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Application 45. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)}$.

ANNEXE

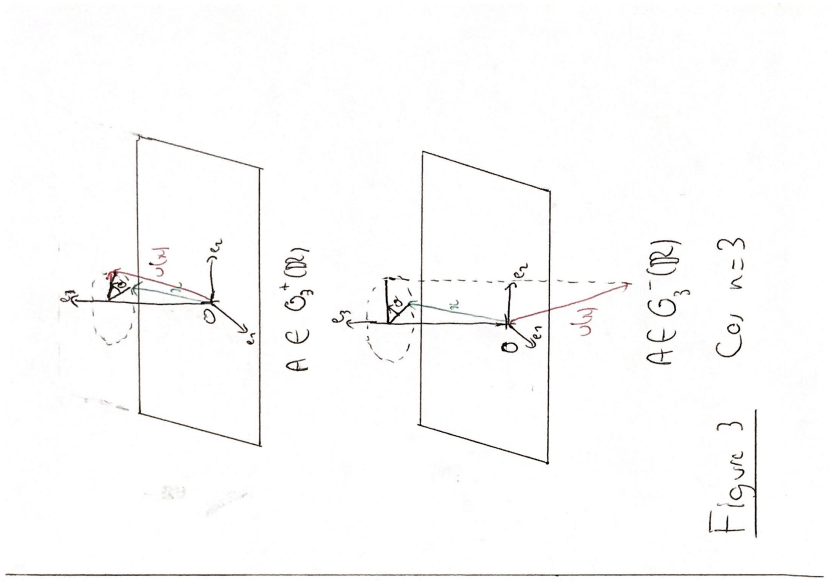

Figure 3 Cas n=3

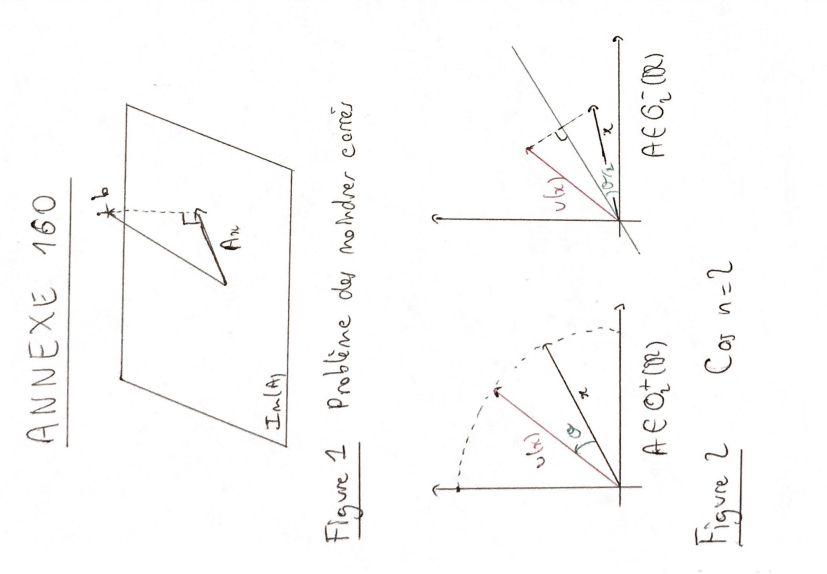

Figure 1

Figure 2 Cas n=2

QUESTIONS

Q Montrer que $|||u|||_2 = |||u^*|||_2$.

R On a $\|u^*(x)\|_2^2 = \langle u^*(x) \mid u^*(x)\rangle = \langle x \mid uu^*(x)\rangle \leq \|x\| \, \|uu^*\|$, donc $|||u^*|||^2 \leq |||uu^*||| \leq |||u^*||| \, |||u|||$. Puis on procède de même pour montrer que $|||u|||^2 \leq |||u^*||| \, |||u|||$.

Q Quelle sont les utilisations des moindres carrés ?

R Enlever des dimensions à notre système (système surdéterminé). Faire une régression linéaire. On peut aussi évoquer le théorème de COCHRAN en probabilités (modèle de régression linéaire gaussien).

Q Un endomorphismes orthogonal conserve-t-il l'angle orienté ?

R Non, regarder les symétries.

Q Que font les projecteurs orthogonaux concernant les angles ?

R Ils annulent les angles.

Q Montrer par récurrence sur n que si M est nilpotente est non nulle, alors $\varphi_M(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ où $\varphi_M : X \longmapsto X^\top M X$.

R Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer, car toute matrice nilpotente est nulle.

Si $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est nilpotente, elle est semblable à $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente. Si elle est non nulle, par hypothèse de récurrence φ_A est surjective, et donc φ_M aussi (à X on associe $(X\,0)$, leur image par A et M sont identiques. Sinon, A est nulle, et par réduction de JORDAN on peut supposer $C = (0, \dots, 0, 1)^\perp$. Prenant $X = \lambda(0, \dots, \alpha, \beta)$, on a $\varphi_M(X) = X^\top(0, \dots, 0, \beta, 0) = \alpha\beta$: c'est dont bien surjectif.
Sinon, on prend l'endomorphisme canoniquement associé à M, …

BIBLIOGRAPHIE

[AK02] G. ALLAIRE et S.-M. KABER : *Algèbre linéaire numérique*. Ellipses, 2002.

[CG13] P. CALDERO et J. GERMONI : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[Gou09] X. GOURDON : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Gri15] J. GRIFONE : *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 5ème édition, 2015.

[Per96] D. PERRIN : *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.

[Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.