159 FORMES LINÉAIRES ET DUALITÉ EN DIMENSION FINIE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

I. Formes linéaires et espace dual [Gou09, §3.4, p126] [Rom17, Ch14, p443]

I. A. Généralités sur les formes linéaires

Définition 1. [Forme linéaire, espace dual]
Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires, appelé espace dual de E.

Exemple 2.
- Dans $\mathbb{K}^n$, l'application $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_k$ pour un $k \in [\![1, n]\!]$ est une forme linéaire,
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $f_A : M \longmapsto \mathrm{Tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en un point a, alors df_a est une forme linéaire.
- Le morphisme d'évaluation $\mathrm{ev}_a : P \longmapsto P(a)$ en un point $a \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 3. *Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Dans ce cas, elle est surjective.*
Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exemple 4. Si A est non nulle, $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(AM) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I. B. Espace dual et base duale
[FGN07, §7.8/7.9, p239] [Gou08, An.B, p407–416] [Bre99, Ch5, p79–82]

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Définition 5. [Base duale]
On appelle base duale de $\mathcal{B}$ la base $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ où chaque e_i^*, défini par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout j, est l'application i-ième coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 6.
- $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{K}^2$. Sa base duale est composée de $(x,y) \longmapsto x$ et $(x,y) \longmapsto y$.
- Soit $\mathcal{B} = (E_{i\,j})_{1\le i\le j\le n}$. La base duale de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}^* = (f_{E_{j\,i}})_{1\le i\le j\le n}$.

Proposition 7. *Toute base duale est une base de E^*. En particulier $\dim(E) = \dim(E^*)$ et pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.*

Corollaire 8. $x = \sum_i x_i e_i \longmapsto \varphi = \sum_i x_i e_i^*$ *est un isomorphisme de E dans E^*. Il n'est cependant pas canonique car dépend de la base $\mathcal{B}$ choisie.*

Théorème 9. [Théorème de Riesz-Fréchet]
Soit H un espace de Hilbert. Alors pour toute application $\phi \in H' = H^*$, il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall v \in H, \phi(v) = \langle f \mid v \rangle$.
De plus $\phi \longmapsto f$ est une isométrie ($\|f\|_H = \|\phi\|_{H'}$).

Application 10. Si E est l'espace euclidien (resp. hermitien) $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) muni de son produit scalaire usuel, on a l'isomorphisme canonique de E dans E^* : $x \longmapsto \langle x \mid . \rangle$.

Proposition 11. [Isomorphisme canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$]
L'application $f : A \longmapsto f_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans son dual. De plus toute forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $f(XY) = f(YX)$ est colinéaire à la trace.

Application 12. Si $n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ coupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

I. C. Espace bidual et base antéduale

Définition 13. $E^{**} = (E^*)^*$ est appelé espace bidual de E^*.

Proposition 14. *On a un isomorphisme de E dans E^{**} donné par*

$$\Theta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & f \mapsto f(x) \end{array}$$

Proposition 15. [Base antéduale]
Soit $\mathcal{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Alors il existe une unique base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dont $\mathcal{B}^*$ est la base duale. $\mathcal{B}$ est alors appelée base antéduale.

Exemple 16. Soient $(a_i)_{0\le i\le n}$ une famille de points de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Notons $\ell_i = \prod_{j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{B}^* = (\ell_0, \dots, \ell_n)$ la base (de $\mathbb{K}_n[X]^*$) des polynômes de Lagrange. Alors la base antéduale de $\mathcal{B}$ est $(\mathrm{ev}_{a_0}, \dots, \mathrm{ev}_{a_n})$.

II. Autour de l'orthogonalité

[Gou09, §3.4, p126] [Rom17, Ch14, p443]

II. A. Notion d'orthogonalité

Définition 17. [Orthogonalité]
- On dit que $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ sont orthogonaux si $\varphi(x) = 0$.
- Pour $A \subset E$ on définit $A^\perp = \{\varphi \in E^* \,|\, \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de A.
- Pour $B \subset E^*$, on définit l'orthogonal de B par $B^\circ = \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$.

Proposition 18.
- *Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, on a $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.*
- *Si $B_1 \subset B_2 \subset E^*$, on a $B_2^\circ \subset B_1^\circ$.*
- *Si $A \subset E$, on a $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$ et si $B \subset E^*$, on a $B^\circ = \mathrm{Vect}(B)^\perp$.*

Théorème 19. *Soit F (resp. G) un sous-espace vectoriel de E (resp. E^*).*
- *On a $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $(F^\perp)^\circ = F$.*
- *On a $\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$ et $(G^\circ)^\perp = G$.*

Application 20.
- Soient $(f_i)_{1 \leq i \leq k} \in (E^*)^k$ de rang r. Alors $F = \cap_{1 \leq i \leq k} \ker(f_i)$ est de dimension $n - r$.
- Réciproquement, si G est un sous-espace vectoriel de dimension $n - r$, il existe r formes linéaires indépendantes dont G est l'intersection des noyaux.

Exemple 21. L'ensemble des applications linéaires qui s'annulent sur un hyperplan de E forme une droite de E^*.

Exemple 22. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ les vecteurs de la base canonique. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_2 - e_4)$. Alors $F = \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2)$, où

$$\varphi_1(a, b, c, d) = a - c \quad \text{et} \quad \varphi_2(a, b, c, d) = b + d - a$$

II. B. Transposée d'une application linéaire

[Rom17, §14.5, p453]

Soit F un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 23. On définit l'application transposée de u par

$$^t u : \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ f & \longmapsto & f \circ u \end{array}$$

Proposition 24.
- *$u \longmapsto {}^t u$ est linéaire et injective de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$,*
- *$\mathrm{Im}({}^t u) = \ker(u)^\perp$,*
- *$\mathrm{Im}(u^\perp) = \ker({}^t u)$,*
- *Si $v \in \mathcal{L}(F, G)$ où G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors ${}^t v \circ u = {}^t u \circ {}^t v$.*

Proposition 25. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et F, de bases duales $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}'^*$. Alors $M_{\mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*}(u) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}({}^t u)^\top$.*
En particulier $\mathrm{rg}({}^t u) = \mathrm{rg}(u)$.

Proposition 26. *Si P est la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ de E vers une base $\mathcal{B}'$, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ vers $\mathcal{B}'^*$ est $(P^{-1})^\top$.*

III. Applications

III. A. Utilisation de la dualité dans la recherche de sous-espaces propres

[Rom17, Ch21, p672]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose connues les notions de polynôme minimal (noté π_f) et de polynôme minimal local (noté $\pi_{f,\,x}$ en un point x).

Proposition 27. *F est f-stable si et seulement si $F^\perp$ est ${}^t f$-stable.*

Proposition 28. *Soit $x \in E$ tel que $\pi_{f,\,x} = \pi_f$. Alors $E_{f,\,x} = \mathbb{K}[f](x)$ admet un supplémentaire f-stable.*

Application 29. [Décomposition de Jordan]
Supposons f de polynôme caractéristique scindé (trigonalisable). Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes. Il existe des entiers $d_{j,\,1} \geq \cdots \geq d_{j,\,\ell_j}$ pour $j \in [\![1, r]\!]$ tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E, $M_\mathcal{B}(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(B_{j,\,k})_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq \ell_j}}$, où

$$B_{j,\,k} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_j & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_j & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d_{j,\,k}}(\mathbb{K}).$$

III. B. Calcul différentiel

[BMP05, §1, p20] [Gou09, §5.2/3, p317/327] [Rou99, Ch7, p380]

On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace euclidien.

PROPOSITION 30. *Si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in E$ alors il existe un unique vecteur appelé gradient de f en a et noté $\nabla f(a)$ tel que :*

$$\forall h \in E, df_a(h) = \langle \nabla f(a) \mid h \rangle$$

APPLICATION 31. Géométriquement, le gradient s'interprète comme la direction de plus grande pente de f autour de a. C'est l'idée utilisée dans de nombreux algorithmes d'optimisation.

THÉORÈME 32. [THÉORÈME DES EXTREMA LIÉS]
Soit $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur U ouvert. Notons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ sont libres, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de LAGRANGE, tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$$

APPLICATION 33. Tout endomorphisme symétrique de E admet une valeur propre réelle.

APPLICATION 34. [INÉGALITÉ DE HADAMARD]
(i) Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace préhilbertien (réel ou complexe). . Alors $|\det((\langle x_i \mid x_j \rangle)_{1 \le i,j \le n})| \le \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.
(ii) Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Alors $|\det(x_1, \dots, x_n)| \le \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_2$, où $\|.\|_2$ désigne la norme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$.

Dans les deux points, on a égalité si et seulement si la famille $\{x_i\}_{1 \le i \le n}$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.

ANNEXE

Interprétation géométrique du gradient, interprétation géométrique de l'inégalité de HADAMARD.

QUESTIONS

Q Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet un hyperplan stable.

R Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev E. Si $f \in E^*$, $\ker(f)$ est un hyperplan. On veut trouver f tel que $u(\ker(f)) \subset \ker f$.
Si x est tel que $f(x) = 0$ alors $f \circ u(x) = 0$. On a $f(x) = 0 \Longrightarrow {}^t u(f)(x) = 0$.
Si ${}^t u$ est diagonale dans une base $(f_1, \dots, f_n)$, on a ${}^t u(f) = {}^t u(\sum a_i f_i) = 0$. Ce qui donne $f = 0$ ...

Q Posons $a = (1,2,3)^\top$, $b = (3,2,1)^\top$, $c = (4,5,6)^\top$ et $d_\ell = (6,5,4+\ell)^\top$ pour un h quelconque. Trouver une base de $E \cap F$ où $E = \mathrm{Vect}(a,b)$ et $F = \mathrm{Vect}(c, d_\ell)$

R Distinguer selon les valeurs de h ...

Q Peut-on trouver deux formes linéaires non nulles sur E dont le produit est nul ?

R Soit $H_i = \ker(\varphi_i)$. Si $H_1 \cup H_2 \neq E$, on prend $x_1 \in H_1 \setminus H_2$ et $x_2 \in H_2 \setminus H_1$, $x_1 + x_2 \notin H_1 \cup H_2$ et $(\varphi_1\varphi_2)(x_1 + x_2) = 0$.

Q Calculer la dimension de $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall i, \sum_j x_{ij} = 0\}$.

R On pose $\varphi_i : M \longmapsto \sum_{j=1}^n m_{ij}$. On a $E = \cap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$.
Soient $(\lambda_i)_i$ tels que $\sum_i \lambda_i \varphi_i = 0$. Prenons $M_i = E_{ii}$, ce qui donne $\lambda_i = 0$.
Donc $\dim(E) = n^2 - n$.

Q Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall j, \sum_i x_{ij} = 0\}$. Calculer la dimension de $E \cap F$.

R $E = \cap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$ et $F = \cap_{j=1}^n \ker(\psi_j)$.

Q Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer $F = \mathrm{Vect}(\{MN - NM \mid M, N \in E\}) = \ker \mathrm{Tr}$.

R Si $M \in F$, Alors $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Montrons qu'on a égalité des dimensions. La trace est une forme linéaire non nulle, il faut donc montrer que F est un hyperplan. Regardons $F^\perp = \{f \in E^* \mid \forall M \in F, f(M) = 0\}$. On a $\mathrm{Tr} \in F^\perp$ et si $f \in F^\perp$, on a $\forall X, Y, f(XY - YX) = 0$ donc $f(XY) = f(YX)$ puis on conclut par la proposition 11 : $F^\perp$ est de dimension 1.

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Bre99] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.

[FGN07] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS : *Oraux X-ENS - Algèbre 1*. Cassini, 2007.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Gou09] X. GOURDON : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.