158 MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES, MATRICES HERMITIENNES.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $M^* = \overline{M}^\top$.

I. Généralités [Gou09, §5.1, p227]

I. A. Définitions et premières propriétés

Définition 1. [Matrice symétrique réelle, matrice hermitienne] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est symétrique (resp. anti-symétrique) si $M = M^\top$ (resp. $M = -M^\top$). On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) réelles.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que M est hermitienne si $M = \overline{M}^\top$. On note $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes.

Exemple 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 1 & -i & 3+2i \\ i & 1 & 1+i \\ 3-2i & 1-i & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

Remarque 3. $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Proposition 4. $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$ *et* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})) = n^2$.

Proposition 5. *On a* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 7. *Pour* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *ou* $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$, *on a* $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

Définition 8. On définit :
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $X^\top SX \geq 0$ pour $X \in \mathbb{R}^n$,
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $X^\top SX = 0 \Longrightarrow X = 0$,
- $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ telles que $\overline{X}^\top HX \geq 0$ pour $X \in \mathbb{C}^n$,
- $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des $H \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$ telles que $\overline{X}^\top HX = 0 \Longrightarrow X = 0$.

I. B. Liens avec les formes bilinéaires symétriques / hermitiennes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon le contexte.

Définition 9. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.
- φ est dite symétrique si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour $x, y \in E$,
- si φ est symétrique, l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x, x)$ est appelée forme quadratique associée à φ. φ est appelée forme polaire associée à Φ (elle est unique).

Définition 10. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire (pour tout $x \in E$, $\varphi(x, .)$ est linéaire et $\varphi(., x)$ est anti-linéaire).
- φ est dite hermitienne si $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ pour $x, y \in E$,
- si φ est hermitienne, l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x, x)$ est appelée forme hermitienne associée à φ. φ est appelée forme polaire associée à Φ (elle est unique)

Exemple 11. Dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$, l'application $\varphi : (f, g) \longmapsto \int_0^1 f\overline{g}$ est hermitienne, et induit sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ une forme bilinéaire symétrique.
Sur $\mathbb{K}^n$, $(X, Y) \longmapsto \overline{X}^\top.Y$ est bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne.

Proposition 12. *Soit* $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E *et* $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire ou sesquilinéaire. Alors*
- *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, φ *est symétrique si et seulement si* $A = M_{\mathcal{B}_E}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
- *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, φ *est hermitienne si et seulement si* $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$.

Pour $x, y \in E$, *on note* X *et* Y *leurs coordonnées dans* $\mathcal{B}_E$. *Dans les deux cas on a alors* $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \overline{X}^\top AY$.

Proposition 13. *Si* $\mathcal{B}'_E$ *est une autre base de* E, *et* P *est la matrice de passage de* $\mathcal{B}_E$ *vers* $\mathcal{B}'_E$, *alors* $M_{\mathcal{B}'_E}(f) = P^\top AP$.

II. Réduction et applications [Gou09, §5.1, p227]

II. A. Orthogonalité et théorème spectral [Rom17, Ch22, p697]

Soit Φ une forme quadratique (resp. hermitienne) de forme polaire φ.

Définition 14. Une base $\mathcal{B}$ de E est dite Φ-orthogonale si $\varphi(e, e') = 0$ pour $e \neq e' \in \mathcal{B}$.

PROPOSITION 15. *Il existe une base Φ-orthogonale de E.*

THÉORÈME 16. **[THÉORÈME SPECTRAL]**
Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$). Alors il existe une matrice P orthogonale (resp. unitaire) telle que $P^{-1}MP = P^*MP$ est diagonale réelle.

APPLICATION 17. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$).

PROPOSITION 18. *Soit $A \in Sc_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top AP$ et $P^\top BP$ soient diagonales.*

II. B. Signature d'une forme quadratique/hermitienne et réduction de Gauss [Rom17, Ch15, p463]

THÉORÈME 19. **[RÉDUCTION DE GAUSS]**
Pour toute forme quadratique (resp. hermitienne) Φ sur E, il existe $r \in \mathbb{N}$, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r} \in (\mathbb{R}^*)^r$ et $(\ell_i)_{1\leq i\leq r} \in (E^*)^r$ indépendantes telles que $\Phi = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i^2$ (resp. $\Phi = \sum_{i=1}^r \lambda_i |\ell_i|^2$).

EXEMPLE 20. $\Phi((x,y,z,t)) = xy + yz + zt + tx = \frac{1}{4}[(x+z+y+t)^2 - (x+z-y-t)^2]$.

THÉORÈME 21. *Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tels que pour toute base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ Φ-orthogonale, alors il y a exactement s vecteurs de $\mathcal{B}$ en lesquels $\Phi > 0$, t vecteurs de $\mathcal{B}$ en lesquels $\Phi < 0$ et $n-s-t$ vecteurs de $\mathcal{B}$ en lesquels $\Phi = 0$. On a $s+t = \mathrm{rg}(\Phi)$.*

DÉFINITION 22. Le couple s,t est appelé signature de Φ.

EXEMPLE 23. $\Phi((x,y,z,t)) = xy + yz + zt + tx$ a pour signature $(1,1)$ et pour rang 2.

COROLLAIRE 24. *Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$) est de rang r, il existe $s,t \in \mathbb{N}$ tels que $s+t = r$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$) telle que $P^\top AP$ (resp. P^*AP) est diagonale par blocs avec pour blocs I_s, $-I_t$ et 0_{n-r}.*

III. Propriétés topologiques en lien avec les matrices symétriques réelles [CG13]

PROPOSITION 25. *$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

LEMME 26. *Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ unique telle que $A = S^2$.*

THÉORÈME 27. **[DÉCOMPOSITION POLAIRE]**
L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \longmapsto & OS \end{array}$ *est un homéomorphisme.*

APPLICATION 28. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est le seul sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

APPLICATION 29. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)}$.

DÉFINITION 30. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\exp(A) = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$.

EXEMPLE 31. On a $\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$.

THÉORÈME 32. *$\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.*

COROLLAIRE 33. *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.*

IV. Applications

IV. A. Différentielle seconde d'une fonction $\mathcal{C}^2$ [Rou99, p327] [Gou08, §5.2, p315]

THÉORÈME 34. **[THÉORÈME DE SCHWARZ]**
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Alors $D^2 f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique.

LEMME 35. *Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $V \in \mathcal{V}(A_0)$ et $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\forall A \in V, A = g(A)^\top A_0 g(A)$.*

THÉORÈME 36. **[LEMME DE MORSE]**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et $d^2 f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \varphi(x)_1^2 + \cdots + \varphi(x)_p^2 - \varphi(x)_{p+1}^2 - \cdots - \varphi(x)_n^2$ au voisinage de 0.

APPLICATION 37. Soit x_0 un point critique de f tel que la hessienne de f est non dégénérée. Alors c'est un minimum (resp. maximum) local si et seulement si la hessienne est de signature $(n,0)$ (resp. $(0,n)$).
De plus, si la hessienne est de signature $(p,n-p)$ pour $1 \leq p \leq n-1$, alors on a des directions v pour lesquelles x_0 sera minimum local de $h \longmapsto f(x+hv)$ et d'autres pour lesquelles x_0 sera maximum local.

EXEMPLE 38. **[CAS $n=2$]** Soit x_0 un point critique de f telle que $D^2f(x_0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Alors

- si $rt-s^2>0$ et $r+t>0$, x_0 est un minimum local,
- si $rt-s^2>0$ et $r+t<0$, x_0 est un maximum local,
- si $rt-s^2<0$, x_0 n'est pas un extremum,
- si $rt-s^2=0$, on ne peut pas conclure.

EXEMPLE 39. Pour le dernier cas, on peut considérer :

$$f(x,y)=x^4 \qquad f(x,y)=-x^4 \qquad f(x,y)=x^4-y^4$$

IV. B. Analyse matricielle numérique

[AK02, PIII/Ch7, p105/135]

THÉORÈME 40. **[FACTORISATION LU]**
Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls. Alors il existe un unique couple (L,U) de matrices tel que L est triangulaire inférieure avec diagonale de 1, U est triangulaire supérieure et $A=LU$.

EXEMPLE 41. $= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 12 & 6 & 19 \\ 24 & 14 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

COROLLAIRE 42. *Si de plus $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe L triangulaire inférieure à diagonale de 1 et D diagonale telle que $A = LDL^\top$.*

THÉORÈME 43. **[FACTORISATION DE CHOLESKY]**
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et $A=BB^\top$.

APPLICATION 44. **[MOINDRES CARRÉS]**
Soient $n,p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_{n,\,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche un vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|b-Ax\|_2 = \inf_{y\in\mathbb{R}^p} \|b-Ay\|_2$.

(i) Il existe toujours une solution au problème,
(ii) x est solution si et seulement si $A^\top Ax = A^\top b$,
(iii) Si $n \geq p$ et $\mathrm{rg}(A)=p$, $A^\top A$ est inversible et il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure, à diagonale positive, telle que $A^\top A = BB^\top$, et alors $x=(BB^\top)^{-1}A^\top b$ est une solution.

IV. C. Vecteurs gaussiens

[BL07, §IV.4, p98]

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

DÉFINITION 45. **[VECTEUR GAUSSIEN]**
Une variable aléatoire $X=(X_1,\dots,X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire des $(X_i)_{1\leq i\leq d}$ suit une loi gaussienne.

EXEMPLE 46. Si les $(X_i)_{1\leq i\leq d}$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors X est un vecteur gaussien. On note alors $X \sim \mathcal{N}(0,I_d)$.

PROPOSITION 47. *La loi d'un vecteur gaussien X est entièrement déterminée par sa moyenne $m=\mathbb{E}[X]$ et sa matrice de covariance $\Sigma = (\mathrm{Cov}(X_i,X_j))_{1\leq i,j\leq d} \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$. On note alors $X\sim\mathcal{N}(m,\Sigma)$.*

PROPOSITION 48. *Soit $m \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,I_d)$.*
Il existe $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma = AA^\top$ et alors $m+AX \sim \mathcal{N}(m,\Sigma)$.

PROPOSITION 49. *Soit $X\sim\mathcal{N}(m,\Sigma)$. Alors Σ est inversible si et seulement si il n'existe pas de relation affine entre les $(X_i)_{1\leq i\leq d}$ presque surement.*
Dans ce cas, X admet pour densité $f : x \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t(x-m)\Sigma^{-1}(x-m)\right)$.

COMMENTAIRES

On peut parler de probabilités avec la notion de covariance, les vecteurs gaussiens et le théorème de COCHRAN (cf [Ouv09]).

QUESTIONS

Q Montrer que $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ a exactement 2 composantes connexes.

R Il y en a au moins 2 en considérant le déterminant. Ensuite on utilise l'homéomorphisme $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ lorsque $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et

Q Donner une réduction de GAUSS de $f(x, y, z, t) = 2xy - y^2 + z^2 + t^2$.

R $f(x, y, z, t) = -(y - 1/2(2x - 3t))^2 + \frac{1}{4}(2x - 3t)^2 + z^2 + t^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[AK02] G. ALLAIRE et S.-M. KABER : *Algèbre linéaire numérique*. Ellipses, 2002.

[BL07] P. BARBE et M. LEDOUX : *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[CG13] P. CALDERO et J. GERMONI : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Gou09] X. GOURDON : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Ouv09] J.-Y. OUVRARD : *Probabilités : Tome 2*. Cassini, 3ème édition, 2009.

[Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.

[Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.