# 157 ENDOMORPHISMES TRIGONALISABLES. ENDOMORPHISMES NILPOTENTS.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

## I. Généralités

### I. A. Rappels sur l'étude d'endomorphismes [MM16]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

**Définition 1. [Polynôme minimal]**
$\varphi_f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[f], P \longmapsto P(f)$ est un morphisme d'algèbres. Son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[f]$ engendré par un unique polynôme unitaire $\pi_f$ appelé polynôme minimal de $f$.

**Proposition 2.** *On a $\dim(\mathbb{K}[f]) = \deg(\pi_f)$.*

**Exemple 3.** Polynômes minimaux usuels **[voir annexe]**

**Proposition 4.** *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f$ et $g$ commutent. Alors $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par $g$. En particulier $\ker(P(f))$ et $\mathrm{Im}(P(f))$ sont stables par $f$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.*

**Lemme 5. [Lemme des noyaux]**
*Soit $(P_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors en posant $P = \prod_{i=1}^r P_i$, on a $\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(f))$.*
*De plus, le projecteur de $\ker(P(f))$ sur l'un de ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres est un polynôme en $f$.*

**Application 6.** Soit $P$ annulateur de $f$. Si $P = \prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$ où les $(P_i)_{1\leq i\leq r}$ sont deux à deux premiers, alors on a la décomposition en sous-espaces $f$-stables $E = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i^{\alpha_i}(f))$.

**Définition 7. [Polynôme caractéristique]**
On définit le polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$. Deux matrices semblables ayant même polynôme caractéristique, on définit le polynôme caractéristique de $f$.

**Exemple 8.** Polynômes caractéristiques usuels **[voir annexe]**

**Proposition 9. [Liens entre valeurs propres]**
*$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $f$ si et seulement si $\chi_f(\lambda) = 0$ si et seulement si $\pi_f(\lambda) = 0$.*

**Théorème 10. [Théorème de Cayley-Hamilton]**
*$\chi_f$ est un polynôme annulateur de $f$. Autrement dit, $\pi_f \mid \chi_f$.*

### I. B. Noyaux itérés [MM16, ChII/IV, p46]

**Proposition 11.** *La suite $(\ker(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante stationnaire et on a :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \dim(\ker(f^{k+1})) = \dim(\ker(f^k)) + \dim(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f^k))$$

**Corollaire 12.** *La suite $(\dim(\ker(f^{k+1})) - \dim(\ker(f^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

**Définition 13.** $p = \min(\{q \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N}, \ker(f^{q+k}) = \ker(f^q)\})$ est appelé indice de $f$.

**Proposition 14.** *$p \leq n$ et on a $E = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$.*

## II. Endomorphismes nilpotents [MM16, ChI/II/IX/X, p3/23/102/113]

**Définition 15.** $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si $f^p = 0$, où $p$ est l'indice (de nilpotence) de $f$.

Soit $f$ nilpotent d'indice $r$.

**Application 16.** On a alors $\pi_f = X^p$ et $\chi_f = X^n$.

**Proposition 17.** *On a $p \leq n$ et on a égalité si et seulement si $\dim(\ker(f)) = 1$.*

**Application 18.** Si $f$ est nilpotent d'incide $n$, il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = J_n = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, $f$ est trigonalisable.

**EXEMPLE 19.** Si $n = 3$ :
- soit $p = 1$, alors $f = 0$,
- soit $p = 2$, alors $\dim(\ker(f)) = 2$,
- soit $p = 3$, alors $\dim(\ker(f)) = 1$.

**PROPOSITION 20.** *$f$ est trigonalisable, avec une diagonale de $0$.*

**PROPOSITION 21.** *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Tr}(g^k) = 0$.*

**EXEMPLE 22.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, le résultat est faux, prenant $g = \mathrm{Id}_{(\mathbb{F}_p)^p}$.

## III. Trigonalisation [MM16, ChIX]

### III. A. Caractérisation

**DÉFINITION 23.** $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ soit triangulaire.

**PROPOSITION 24.** *Si $f$ est trigonalisable, les coefficients diagonaux de sa matrice dans une base adaptée sont les valeurs propres de $f$. Notant $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ ses valeurs propres, chacune de multiplicité algébrique $m_a(\lambda_i)$, on a :*

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{r} m_a(\lambda_i)\lambda_i \qquad \text{et} \qquad \det(f) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_a(\lambda_i)}$$

**THÉORÈME 25.** *$f$ est trigonalisable si et seulement si $\chi_f$ est scindé si et seulement si $\pi_f$ est scindé si et seulement si $f$ admet un polynôme annulateur scindé.*

**COROLLAIRE 26.** *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou est algébriquement clos, tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.*

**EXEMPLE 27.** La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais par sur $\mathbb{R}$.

**APPLICATION 28.** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

**COROLLAIRE 29.** *Si $f$ est trigonalisable et si $F$ est un sous-espace $f$-stable de $E$, alors $f_F$ est trigonalisable.*

### III. B. Co-trigonalisation

**LEMME 30.** *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f$ et $g$ commutent. Alors les sous-espaces propres de $f$ sont $g$-stables.*

**PROPOSITION 31.** *Soit $(f_k)_{1\leq k\leq N}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de trigonalisation (on dit que les $(f_k)_{1\leq k\leq N}$ sont co-trigonalisables).*

**EXEMPLE 32.** Soient $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ des endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux. Alors $f_1 \dots f_n = 0$.

**PROPOSITION 33.** *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables tels que $fg = 0$. Alors $f$ et $g$ sont co-trigonalisables.*

**PROPOSITION 34.** *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables tels que $fg - gf = \alpha f + \beta g$ pour un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Alors $f$ et $g$ sont co-trigonalisables.*

## IV. Utilisations d'endomorphismes nilpotents/trigonalisables

### IV. A. Décomposition de DUNFORD [MM16, Ch10] [Gou09, §4.4, p193]

**THÉORÈME 35. [DÉCOMPOSITION DE DUNFORD]** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $d$ est diagonalisable, $n$ est nilpotent, $f = d + n$ et $d$ commute avec $n$.*
*De plus, $d$ et $n$ sont des polynômes en $f$.*

**APPLICATION 36.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. On note $\mu_1, \dots, \mu_n$ les $n$ racines de $\chi_M$ (comptées sans leur multiplicité). Soit $(D, N)$ la décomposition de DUNFORD de $M$. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}DP = \Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ soit diagonale. Alors on a :

$$\exp(A) = P\,\mathrm{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n})P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

**EXEMPLE 37.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

**EXEMPLE 38.** Un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

**APPLICATION 39.** Résolution de l'équation différentielle $Y' = AY$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

## IV. B. Réduction de JORDAN

**[MM16, ChX] [Rom17, Ch21, p672–675]**

**LEMME 40.** *Soit $f$ nilpotent d'indice $r$. Soit $x \notin \ker(f^{r-1})$. Posons $F_x = \mathrm{Vect}(\{x, f(x), \dots, f^{r-1}(x)\})$.*
- *$F_x$ est $f$-stable et $\mathcal{B}_x = \{x, f(x), \dots, f^{r-1}(x)\}$ en est une base,*
- *$F_x$ admet un supplémentaire $f$-stable.*

**PROPOSITION 41. [DÉCOMPOSITION DE JORDAN D'UN ENDOMORPHISME NILPOTENT]** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Il existe des entiers $d_1 \geq \dots \geq d_\ell$ tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de $E$, $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(J_{r_k})_{1 \leq k \leq \ell}$.*

**THÉORÈME 42. [DÉCOMPOSITION DE JORDAN]** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres. Il existe des entiers $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,\ell_j}$ pour $j \in [\![1, r]\!]$ tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de $E$, $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(B_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq \ell_j}}$, où $B_{j,k} = \lambda_j I_{d_{j,k}} + J_{d_{j,k}}$ avec $J_d = \mathcal{C}(X^d) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.*

**EXEMPLE 43.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**THÉORÈME 44.** *Deux endomorphismes trigonalisables sont semblables si et seulement si ils ont même réduction de JORDAN.*

**DÉFINITION 45. [TABLEAU DE YOUNG]** Le tableau de YOUNG associé à une suite d'entiers $d_1 \geq \dots \geq d_\ell$ est un tableau à $\ell$ lignes telles que chaque ligne $i$ comporte $d_i$ cases.
A un endomorphisme nilpotent $f$, on peut donc associer un unique tableau de YOUNG associé à cet endomorphisme via sa réduction de JORDAN.
Plus généralement, si $f$ est trigonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, on lui associe les $r$ tableaux de YOUNG associés aux $r$ valeurs propres comme le tableau de YOUNGde $f_{N_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_i}$ où $N_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id})^{m_a(\lambda_i)}$.

**PROPOSITION 46.** *Deux endomorphismes nilpotents (resp. trigonalisables) sont semblables si et seulement si ils ont même tableau de YOUNG (resp. ils ont même valeurs propres et mêmes tableaux de YOUNG associés à chacune des valeurs propres).*

**EXEMPLE 47. [LECTURE D'UN TABLEAU DE YOUNG]** Soit $f$ nilpotent. Regardons son tableau de YOUNG :
- les cases du tableau s'interprètent comme les éléments d'une base dans laquelle la matrice de $f$ est la forme réduite de JORDAN.
  La $i$-ième ligne est associée au bloc de JORDAN de taille $d_i$. Si on prend $x$ tel que $F_x$ est le sous-espace associé à ce bloc, alors les cases de la ligne $i$ parcourues de gauche à droite sont associées à la base $f^{d_i - 1}(x), \dots, f(x), x$ de $F_x$,
- pour trouver les sous-espaces associés à $\mathrm{Im}(f^k)$, il suffit d'enlever les $k$ dernières cases de chaque ligne,
- pour trouver les sous-espaces associés à $\ker(f^k)$, on garde les $k$ premières cases de chaque ligne,
- de ces deux dernières observations on déduit facilement $\dim(\mathrm{Im}(f^k))$ et $\dim(\ker(f^k))$,
- l'indice de nilpotence est le nombre maximal de cases sur une ligne.

**APPLICATION 48.** Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents ayant même polynôme minimal et même rang. Alors si $n \leq 6$, $f$ et $g$ sont semblables. En dimension 7, on a un contre-exemple : considérer les tableaux $(3,2,2)$ et $(3,3,1)$.

**APPLICATION 49.** Il y a autant de classes de similitudes de matrices nilpotentes que de partitions de $n$.

## ANNEXE

Polynômes minimaux et caractéristiques usuels

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension $1 \leq p \leq n-1$.

| $f$ | $\pi_f$ | $\chi_f$ |
|---|---|---|
| nilpotent d'indice $k$ | $X^k$ | $X^n$ |
| homothétie de rapport $\lambda$ | $X-\lambda$ | $(X-\lambda)^n$ |
| projecteur sur $F$ | $X^2-X$ | $(X-1)^p X^{n-p}$ |
| symétrie par rapport à $F$ | $X^2-1$ | $(X-1)^p(X+1)^{n-p}$ |

Tableaux de Young

## SPEECH

Les endomorphismes trigonalisables sont très intéressants à étudier car leur structure permet une simplification des manipulations (le produit de matrices triangulaires supérieures reste une matrice triangulaire supérieure, on a les valeurs propres sur la diagonales, ...).

Leur étude nous amène d'abord à regarder le cas des endomorphismes nilpotents. Le lien entre les deux arrive avec la décomposition de Dunford.

## COMMENTAIRES

Cette leçon est sensée amener vers Jordan.

## QUESTIONS

Q Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $[[f,g],f]=0$, alors $[f,g]$ est nilpotent.

R On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}([f,g]^n) &= \mathrm{Tr}([f,g]^{n-1}[f,g]) = \mathrm{Tr}([f,g]^{n-1}(fg-gf)) \\ &= \mathrm{Tr}([f,g]^{n-1}fg) - \mathrm{Tr}([f,g]^{n-1}gf) \\ &= \mathrm{Tr}(gf[f,g]^{n-1}) - \mathrm{Tr}([f,g]^{n-1}gf) = 0\end{aligned}$$

Il reste à appliquer la proposition 21.

Q À quoi correspond l'espace vectoriel engendré par les nilpotents ?

R Cet espace ne contient pas d'élément inversible, car $0$ est valeur propre de chacun de ses éléments. Tous les éléments de l'ensemble ont une trace nulle, car $\mathrm{Tr}(n_1+n_2)=0$. On va montrer qu'en fait ce sont tous les éléments de trace nulle. En effet, matriciellement, les matrices de trace nulle sont de dimension $n^2-1$, et la dimension de notre espace vectoriel est au moins $n^2-n$ car $(E_{i\,j})_{i\neq j}$ est une famille libre de notre espace, tout comme les matrices $\left(\mathrm{diag}\left(0,\dots,0,\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},0,\dots,0\right)\right)_{1\leq i\leq n-1}$ où le bloc non nul est en position $i$, et les deux familles considérées sont libres entre elles. On a donc une famille libre de dimension $n^2-1$, ce qui conclut.

Q Montrer que la décomposition de Dunford reste valable pour toute matrice réelle, et qu'alors $D$ et $N$ sont réelles.

R Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, donc on écrit $M = D+N$ sa décomposition de Dunford. On a alors $\overline{D}+\overline{N} = \overline{M} = M = D+N$ donc par unicité $D$ et $N$ sont bien réelles.

Q Trigonaliser $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3\\ 5 & 1 & -5\\ -3 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

R On calcule $\chi_M = (X-1)^3$. On trouve $e_1 = (1,1,1)^\top \in \ker(M-I_3)$ et $e_2 = (1,1,0)^\top \in \ker(M-I_3)^2$. Complétant en une base $(e_1,e_2,e_3)$, la matrice dans cette base est triangulaire.

## BIBLIOGRAPHIE

[Gou09] X. Gourdon : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[MM16] R. Mansuy et R. Mneimné : *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes*. De Boeck, 2 ème édition, 2016.

[Rom17] J.-E. Rombaldi : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.