156 EXPONENTIELLE DE MATRICES. APPLICATIONS.

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre $\|.\|$.

I. Convergence et propriétés algébriques de l'exponentielle de matrices

[Rom17, Ch23, p745] [Ave97, Ch5, p47]

Définition de la série exponentielle
Convergence normale sur tout compact, donc convergence de $\exp(A)$
Exemple : $\exp(0), \exp(I)$
Exponentielle de la somme de matrices qui commutent, contre-exemple. On en déduit que $\exp(A)$ est inversible et l'expression de $\exp(A)^{-1}$
$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$, $\exp(A^\top) = \exp(A)^\top$, $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$, $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{Tr}(A))$
$\exp(A)\in\mathbb{K}[A]$ commute avec A

II. Calcul pratique de l'exponentielle

[Rom17, Ch23, p745] [Gou09, §4.4, p193]

Matrice diagonale, nilpotente, puis utilisation de la décomposition de Dunford ou de la décomposition de Jordan

Théorème 1. [Décomposition de Dunford] *Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé. Alors il existe un unique couple $(d,n)\in\mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, $f=d+n$ et d commute avec n.*
De plus, d et n sont des polynômes en f.

Application 2. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. On note $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ de multiplicités $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ ou $\mu_1,\dots,\mu_n$ les racines de χ_M. Soit (D,N) la décomposition de Dunford de M. Soit $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}DP=\Delta=\operatorname{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$ soit diagonale. Soit p_i le projecteur sur $\ker(f-\lambda_i\operatorname{Id})^{\alpha_i}$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i}\ker(f-\lambda_j\operatorname{Id})^{\alpha_j}$. Alors on a :

$$\exp(M)=P\operatorname{diag}(e^{\mu_1},\dots,e^{\mu_n})P^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{N^k}{k!}=\sum_{i=1}^r e^{\lambda_i}\left[\sum_{p=0}^{\alpha_i-1}\frac{(A-\lambda_i\operatorname{Id})^k}{k!}\right]P_i$$

Si χ_A est scindé, A est diagonalisable si et seulement si son exponentielle l'est
Utilisation de la décomposition de Jordan

III. Propriétés analytiques de l'exponentielle

III. A. Différentiabilité

[Ave97, Ch5/7, p57/79] [Rom17, Ch23, p745]

$\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ (admis), expression de la différentielle
$\exp$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo local de 0 sur I_n

III. B. Injectivité et surjectivité

[Rom17, §23.4, p752] [CG13, §VI.2.5, p357–358]

Fonction log définie sur $\mathbb{B}(I_n,1)$, qui vérifie $\exp\circ\log=\operatorname{Id}$
$\ln$ bien définie sur les matrices unipotentes
Homéomorphisme de N_p sur U_p, d'inverse le logarithme
$\exp$ est surjective (sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$) si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: il existe même $Q\in\mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(A))=A$
Connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$
$\exp$ est non injective, de noyau les matrices diagonalisables de spectre inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$ [FGN07, §4.25, p417]
Sur $\mathbb{R}$, on a injectivité, mais plus surjectivité : $\exp(A)=\exp(A/2)^2$ donc $\exp$ est à valeurs dans $\mathcal{GL}_n^+(\mathbb{C})$

Théorème 3. $\exp:\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

Proposition 4. $\exp:\mathcal{H}_n(\mathbb{C})\longrightarrow\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ *est un homéomorphisme.*

Décomposition polaire : on déduit les homéomorphismes $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\simeq\mathcal{O}_n\times\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})\simeq\mathcal{U}_n\times\mathbb{R}^{n^2}$

IV. Application aux équations différentielles linéaires

[Ber17, Ch2/6, p46/233]

Remarque : la fonction $t\longmapsto e^{tA}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $t\longmapsto A\,e^{tA}$
Étude de $Y'=AY$ [Dem96]
Remarque : on peut toujours se ramener à une équation différentielle matricielle d'ordre 1 !
Solutions sous forme intégrale
Théorèmes de stabilité selon les valeurs propres de A
Exemples

QUESTIONS

Q A-t-on $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$?

R La première matrice a pour déterminant -1, donc n'est pas un carré dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$. Or si $A = \exp(B)$, on a $A = \exp(B/2)^2$ donc A est un carré.
Pour la deuxième, on regarde le spectre de la matrice et on aboutit à une contradiction.

Q Soit M ayant une seule valeur propre, qui est réelle et strictement positive. A-t-on $M \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$?

R On a $\chi_M = (X-\lambda)^n$ est scindé. Écrivons sa décomposition de Dunford : on a $M = D+N$, avec $D = \lambda I_n$ et donc $\frac{1}{\lambda}M = I_n + \frac{1}{\lambda}N$. Si $A = \mathrm{Log}(I_n + \frac{1}{\lambda}N)$, on a $\exp(A) = M$.

Q $\exp$ est-elle injective sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice diagonalisables de $\mathbb{R}$?

R Soit A, B diagonalisables telles que $\exp(A) = \exp(B)$. On vérifie que A, B commutent, et donc sont co-diagonalisables, ce qui implique alors que $A = B$ en regardant ce que donne $\exp(A) = \exp(B)$ dans une base de co-diagonalisation.
Pour montrer le commutativité, on montre que A est un polynôme en B.

Q Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Q Montrer que $\exp$ de $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid e^{\mathrm{Sp}(A)} \cap \mathbb{R} = \varnothing\}$ est à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

R Penser à utiliser la réduction de Jordan.

BIBLIOGRAPHIE

[Ave97] A. Avez : *Calcul différentiel*. Masson, 1997.

[Ber17] F. Berthelin : *Equations différentielles*. Cassini, 2017.

[CG13] P. Caldero et J. Germoni : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[Dem96] J.-P. Demailly : *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences, 1996.

[FGN07] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas : *Oraux X-ENS - Algèbre 2*. Cassini, 2007.

[Gou09] X. Gourdon : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Rom17] J.-E. Rombaldi : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.