# 154 SOUS-ESPACES STABLES PAR UN ENDOMORPHISME OU UNE FAMILLE D'ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE. APPLICATIONS.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

## I. Sous-espaces stables par un endomorphisme

### I. A. Définitions et premières propriétés [MM16, ChII]

**Définition 1.** $F$ sous-espace vectoriel de $E$ est dit $f$-stable si $f(F) \subset F$. On note alors $f_F : F \longrightarrow F, x \longmapsto f(x)$ l'induit de $f$ sur $F$.

**Proposition 2.** *Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec $f$. Alors $\mathrm{Im}(f), \ker(f)$ et $\ker(P(f))$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ sont $g$-stables.*

**Exemple 3.** En particulier $E_\lambda = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ est $f$-stable pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. $E_\lambda$ est le sous-espace propre associé à $\lambda$. S'il est non réduit à $\{0\}$, on dit que $\lambda$ est valeur propre de $f$.

**Exemple 4.** Soit $p$ un projecteur de $\mathcal{L}(E)$ et $F$ un sous-espace $p$-stable. Alors $F$ est somme directe d'un sous-espace de $\ker(p)$ et d'un sous-espace de $\mathrm{Im}(p)$.

**Exemple 5.** Soit $g \in \mathrm{Aut}(E)$ et $F$ $f$-stable. Alors $g(F)$ est stable pour $g \circ f \circ g^{-1}$.

**Proposition 6.** *Si $F$ est $f$-stable, alors $\pi_{f_F} \mid \pi_f$ et $\chi_{f_F} \mid \chi_f$.*

### I. B. Sous-espaces cycliques [MM16, ChI/II]

Soit $x \in E$.

**Définition 7.** [Polynôme minimal local, sous-espace cyclique]
L'application $\varphi_{f,\,x} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow E, P \longmapsto P(f)(x)$ est un morphisme d'espaces vectoriels. Son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[f]$. Il est engendré par un unique polynôme unitaire $\pi_{f,\,x}$ appelé polynôme minimal local de $f$ en $x$. On note $E_{f,\,x}$ son image.

**Proposition 8.** *$E_{f,\,x}$ est $f$-stable et $E_{f,\,x} = \mathbb{K}[f](x) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_x)$ où $d = \deg \pi_{f,\,x}$ et $\mathcal{B}_x = \{x, f(x), \ldots, f^{d-1}(x)\}$ est une base de $E_{f,\,x}$.*

**Définition 9.** On dit que $f$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = E_{f,\,x}$.

**Exemple 10.** Si $n = 2$, tout endomorphisme est soit cyclique, soit une homothétie.

**Proposition 11.** *Supposons $f$ cyclique et soit $x$ tel que $E = E_{f,\,x}$.*

*Alors* $M_{\mathcal{B}_x}(f) = \mathcal{C}(\pi_{f,\,x}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ *où* $\pi_{f,\,x} = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

*C'est une matrice appelée matrice compagnon de $\pi_{f,\,x}$. On a alors $\chi_f = \pi_f = \pi_{f,\,x}$.*

**Proposition 12.** *Si $f$ est cyclique, l'ensemble des endomorphismes commutants avec $f$ est $\mathbb{K}[f]$.*

**Théorème 13.** [Théorème de Cayley-Hamilton]
*$\chi_f$ est un polynôme annulateur de $f$. Autrement dit, $\pi_f \mid \chi_f$.*

## II. Détermination de sous-espaces stables et réduction

### II. A. Lemme des noyaux et décomposition de Dunford [MM16, ChIV]

**Lemme 14.** [Lemme des noyaux]
*Soit $(P_i)_{1 \le i \le r}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors en posant $P = \prod_{i=1}^r P_i$, on a $\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(f))$. De plus, le projecteur de $\ker(P(f))$ sur l'un de ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres est un polynôme en $f$.*

**Application 15.** Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{f,\,x} = \pi_f$. Donc si $\deg(\pi_f) = n$, alors $f$ est cyclique.

**Théorème 16.** [Décomposition de Dunford]
*Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $d$ est diagonalisable, $n$ est nilpotent, $f = d + n$ et $d$ commute avec $n$.*
*De plus, $d$ et $n$ sont des polynômes en $f$.*

**Application 17.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. On note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les $n$ racines de $\chi_M$ (comptées sans leur multiplicité). Soit $(D, N)$ la décomposition de Dunford de $M$. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}DP = \Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ soit diagonale. Alors on a $\exp(A) = P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mu_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mu_n})P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$.

**Exemple 18.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} & \mathrm{e}/2 \\ 0 & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}$$

**Exemple 19.** Un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

**Application 20.** Résolution de l'équation différentielle $Y' = AY$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

## II. B. Utilisation de la dualité dans la recherche de sous-espaces propres

[Rom17, Ch21, p672]

**Définition 21.** Pour $A \subset E$ on définit $A^\perp = \{\varphi \in E^* \,|\, \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ et pour $B \subset E^*$, on définit $B^\circ = \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$.

**Définition 22.** On définit ${}^t f : E^* \longrightarrow E^*, \varphi \longmapsto \varphi \circ f$.

**Proposition 23.** *Si $\mathcal{B}^*$ est la base duale de $\mathcal{B}$, on a $M_{\mathcal{B}^*}({}^t f) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top$.*

**Proposition 24.** *$F$ est $f$-stable si et seulement si $F^\perp$ est ${}^t f$-stable.*

**Proposition 25.** *Soit $x \in E$ tel que $\pi_{f,\,x} = \pi_f$. Alors $E_{f,\,x}$ admet un supplémentaire $f$-stable.*

## II. C. Sous-espaces stables et trigonalisabilité / diagonalisabilité

[MM16, ChVIII–IX]

**Théorème 26.** *$f$ est trigonalisable si et seulement si $\chi_f$ est scindé si et seulement si $\pi_f$ est scindé si et seulement si $f$ admet un polynôme annulateur scindé.*

**Exemple 27. [Endomorphisme trigonalisable]**
Si $f$ est trigonalisable et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de trigonalisation (supérieure), alors $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est $f$-stable.

**Théorème 28.** *$f$ est diagonalisable si et seulement si $\pi_f$ est scindé à racines simples si et seulement si $f$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.*

**Proposition 29.** *Si $f$ est diagonalisable, soit $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres. Alors l'ensemble des sous-espaces stables de $f$ sont les $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} F_\lambda$ où $F_\lambda$ est un sous-espace de $E_\lambda$.*

**Application 30.** Sous-espaces propres d'un projecteur, d'une symétrie.

## II. D. Autour des nilpotents et de la décomposition de Jordan

[MM16, ChX] [Rom17, Ch21, p672–675]

**Application 31. [Endomorphisme nilpotent]**
Si $f$ est nilpotent d'indice $n$ alors les sous-espaces stables de $f$ sont exactement les $(\ker(f^k))_{0 \leq k \leq n}$.

**Lemme 32. [Décomposition de Jordan d'un endomorphisme nilpotent]**
*Supposons $f$ nilpotent. Il existe des entiers $d_1 \geq \cdots \geq d_\ell$ tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de $E$, $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(J_{d_k})_{1 \leq k \leq \ell}$ où $J_d = \mathcal{C}(X^d)$.*

**Théorème 33. [Décomposition de Jordan]**
*Supposons $f$ de polynôme caractéristique scindé (trigonalisable). Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes. Il existe des entiers $d_{j,\,1} \geq \cdots \geq d_{j,\,\ell_j}$ pour $j \in [\![1, r]\!]$ tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de $E$, $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(B_{j,\,k})_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq \ell_j}}$, où $B_{j,\,k} = \lambda_j I_{d_{j,k}} + J_{d_{j,k}}$.*

**Exemple 34.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Théorème 35.** *Deux endomorphismes trigonalisables sont semblables si et seulement si ils ont même réduction de Jordan.*

**Exemple 36.** On déduit de la réduction de Jordan tout un ensemble de sous-espaces stables. Le cas d'un nilpotent est traité en annexe, en utilisant le tableau de Young associé à l'endomorphisme. Le cas général s'en déduit.

### II. E. Décomposition de Frobenius [MM16, ChXI]

**Théorème 37. [Décomposition de Frobenius]**
*Il existe une unique suite finie de polynômes unitaires $P_1, \dots, P_s$, appelés invariants de similitude et une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^s E_i$ en sous-espaces stables de $E$ tels que :*
- $P_{i+1} \mid P_i$ *pour tout* $1 \leq i \leq s-1$,
- $f_{E_i}$ *est cyclique de polynôme minimal* $P_i$ *pour tout* $1 \leq i \leq s$.

**Corollaire 38.** *Dans des bases adéquates la matrice de $f$ est diagonale par blocs avec pour blocs les matrices compagnons $(\mathcal{C}(P_i))_{1 \leq i \leq s}$. On dit que c'est la forme réduite de $f$.*

**Exemple 39.** La réduite de $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

## III. Autres propriétés autour des sous-espaces stables

### III. A. Co-trigonalisabilité et co-diagonalisabilité [MM16, CHVIII/IX]

Rappel 40. Les sous-espaces propres de $f$ sont stables par tout endomorphisme commutant avec $f$.

**Proposition 41.** *Soit $(f_k)_{1 \leq k \leq N}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de trigonalisation (on dit que les $(f_k)_{1 \leq k \leq N}$ sont co-trigonalisables).*

**Application 42.** Des endomorphismes trigonalisables commutant deux à deux possèdent au moins $n+1$ sous-espaces stables en commun.

**Proposition 43.** *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables tels que $fg = 0$. Alors $f$ et $g$ sont co-trigonalisables.*

**Proposition 44.** *Soit $(f_k)_{1 \leq k \leq N}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de diagonalisation (on dit que les $(f_k)_{1 \leq k \leq N}$ sont co-diagonalisables).*

**Application 45.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Alors $\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définit par $\Theta(M) = AMB$ est diagonalisable.

**Exemple 46.** Soit $G$ un sous-groupe fini abélien de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors les éléments de $G$ sont co-diagonalisables, et donc $G$ est conjugué à un sous-groupe de matrices diagonales.

**Corollaire 47.** *Si de plus chaque endomorphisme possède $n$ valeurs propres distinctes, les sous-espaces stables sont les mêmes pour chaque endomorphisme.*

**Exemple 48.** Si les valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes, c'est faux : on peut considérer pour $f_1$ une homothétie et pour $f_2$ un endomorphisme diagonalisable qui n'est pas une homothétie.

### III. B. Semi-simplicité [BMP05, §4.2.1, p158–161] [Gou09, §5.4, p224–226]

**Définition 49. [Endomorphisme semi-simple]**
$f$ est dit semi-simple si tout sous-espace $f$-stable admet un supplémentaire $f$-stable.

**Théorème 50.** *$f$ est semi-simple si et seulement si $\pi_f$ est sans facteur carré.*

**Application 51.** Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $f$ est semi-simple si et seulement si $f$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

**Exemple 52.** Si $f$ est nilpotente, alors $f$ est semi-simple si et seulement si $f = 0$.

**Exemple 53.** Les rotations de $\mathbb{R}^2$ sont semi-simples.

**Application 54.** Supposons $f$ semi-simple et soit $F$ un sous-espace $f$-stable. Alors $u_F$ et $\overline{u} : E/F \longrightarrow E/F$ sont aussi semi-simples.

## ANNEXE

Lecture de sous-espaces stables sur un tableau de YOUNG

## SPEECH

On veut illustrer le rôle des sous-espaces stables dans la théorie des endomorphismes : trouver des sous-espaces stables permet par exemple de simplifier l'étude en se restreignant à un sous-espace stable, cela va amener vers la réduction des endomorphismes.
Dans chaque partie, on se demande à quoi servent les sous-espaces stables, et comment les identifier.
D'abord, pour les endomorphismes cycliques, on a un vecteur dont le sous-espace stable minimal et l'espace tout entier, on va donc parcourir l'espace entièrement grâce à ce vecteur. Ces sous-espaces sont importants car ils permettent de montrer le théorème de CAYLEY-HAMILTON très important en théorie des endomorphismes.
Ensuite, l'idée de la réduction de JORDAN est d'obtenir des sous-espaces propres donnés par le lemme des noyaux via le polynôme caractéristique. Pour la décomposition de FROBENIUS, on s'intéresse aux sous-espaces cycliques associés aux $x$ tel que $\pi_f = \pi_{f,\,x}$.
Enfin, on s'intéresse aux propriétés autour des sous-espaces propres et de la (co-)trigonalisabilité/diagonabilité. La trigonalisation revient par exemple à trouver une famille imbriquée de sous-espaces stables.

## QUESTIONS

Q Soit $f$ cyclique. Montrer qu'il y a un nombre fini de sous-espaces $f$-stables.

R Soit $x \in E$ tel que $E = E_{f,\,x}$. Fixons $F$ un sous-espace $f$-stable et considérons $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(f)(x) \in F\}$. Comme $F$ est $f$-stable, il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Il est donc engendré par un unique polynôme unitaire $Q$. Si $y = Q(f)(x)$, on a $\mathbb{K}[f](y) \subset F$ par stabilité mais réciproquement, si $z = P(f)(x) \in F$, alors nécessairement $P = QR$ pour un $R$ et donc $z = R(f)(y)$. Ainsi $F = E_{f,y}$ est cyclique. Comme $\pi_f(f)(x) = 0 \in F$, on remarque alors que $Q \mid \pi_f$, et on a donc une injection de l'ensemble des sous-espaces $f$-stables de $E$ dans les polynômes unitaires diviseurs de $\pi_f$. Ainsi il y a un nombre fini de sous-espaces $f$-stables.

Q Qu'en est-il de la réciproque lorsque $\mathbb{K}$ est infini ?

R Soit $f$ ayant un nombre fini de sous-espaces stables. Alors $E$ ne peut être réunion de sous-espaces stables stricts de $E$. En effet, si $E = \cup_{i=1}^k E_i$ avec $E_1 \not\subset \cup_{i>1} E_i$. Prenons donc $x \in E_1 \setminus \cup_{i>1} E_i$ et $y \in \cup_{i>1} E_i \setminus E_1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $y + \lambda x \notin E_1$ donc il existe $i$ tel que $y + \lambda x \in E_i$. Comme $\mathbb{K}$ est infini, il existe $\lambda \neq \mu$ tels que $y + \lambda x, y + \mu x \in E_i$ pour un certain $i$. Alors $(\lambda - \mu)x = y + \lambda x - (y + \mu x) \in E_i$, donc $x \in E_i$, ce qui est absurde.
Notons maintenant $(F_i)_{1 \leq i \leq k}$ les sous-espaces stricts de $E$ $f$-stables. Choisissons $x \notin \cup_i F_i$. Alors $G = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est une famille libre sinon $\mathrm{Vect}(\{x, f(x), \dots, f^{n-2}(x)\})$ serait $f$ stable et de dimension inférieure à $n-2$, donc strictement inclus dans $E$ donc égal à l'un des $E_i$, ce qui est faux par définition de $x$. Ainsi $\pi_{f,\,x}$ est de dimension $n$, et donc $f$ est cyclique.

Q Soit $f$ tel que tout sous-espace est $f$-stable. Que peut-on dire de $f$ ?

R Les sous-espaces de dimension $1$ sont $f$-stables donc chaque vecteur est vecteur propre. Puis pour $x, y \in E$ de valeur propre $\lambda_x \neq \lambda_y$, on a $\lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x)+f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, donc comme $(x, y)$ est libre on a $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$, ce qui est absurde. Ainsi $f$ est une homothétie.

Q Montrer la décroissance des sauts de dimension dans la suite des noyaux itérés.

R Plusieurs possibilités, on peut quotienter.

## BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Gou09] X. GOURDON : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[MM16] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ : *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes*. De Boeck, 2 ème édition, 2016.

[Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.