153 POLYNÔMES D'ENDOMORPHISME EN DIMENSION FINIE. RÉDUCTION D'UN ENDOMORPHISME EN DIMENSION FINIE. APPLICATIONS.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit $P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k \in \mathcal{L}(E)$.

I. Polynômes d'endomorphisme

I. A. L'algèbre $\mathbb{K}[f]$ et polynôme minimal [MM16, ChI/IV]

DÉFINITION 1. [POLYNÔME MINIMAL] L'application $\varphi_f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E), P \longmapsto P(f)$ est un morphisme d'algèbres. Son noyau, l'ensemble des polynômes annulateurs de f, est un idéal de $\mathbb{K}[f]$ principal donc est engendré par un unique polynôme unitaire π_f appelé polynôme minimal de f. Son image $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

REMARQUE 2. Le noyau est non réduit à $\{0\}$ puisque $\mathcal{L}(E)$ est de dimension infinie n^2. En dimension finie, c'est faux (considérer par exemple l'opérateur de dérivation).

PROPOSITION 3. *On a $\dim(\mathbb{K}[f]) = \deg(\pi_f)$.*

EXEMPLE 4. Polynômes minimaux usuels **[VOIR ANNEXE]**

REMARQUE 5. Se donner $f \in \mathcal{L}(E)$ revient à se donner sa matrice M dans une base de E. On a donc les mêmes résultats pour les matrices, et si M est une matrice de f dans une certaine base, on a $\pi_f = \pi_M$ (donc deux matrices semblables ont même polynôme minimal).

I. B. Polynôme caractéristique [MM16, ChV/VII] [Gou09, Ch4] [BMP05, §4.6, p217]

DÉFINITION 6. [POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE]
On définit le polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

EXEMPLE 7. En dimension 2, on a $\chi_M = X^2 - \operatorname{Tr}(M)X + \det(M)$ et $\chi_M(M) = 0$. En dimension quelconque, si $\chi_M = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $a_n = 1, a_{n-1} = -\operatorname{Tr}(M)$ et $a_0 = (-1)^n \det(M)$.

PROPOSITION 8. *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. On peut donc définir le polynôme caractéristique de f.*

EXEMPLE 9. Polynômes caractéristiques usuels **[VOIR ANNEXE]**

PROPOSITION 10. *Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.*

PROPOSITION 11. *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $M \longmapsto \chi_M$ est continue.*

APPLICATION 12. L'ensemble des matrices nilpotentes est fermé pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. C. Polynômes d'endomorphisme et sous-espaces stables [MM16, ChI/IV]

PROPOSITION 13. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que f et g commutent. Alors $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g. En particulier $\ker(P(f))$ et $\operatorname{Im}(P(f))$ sont stables par f pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.*

LEMME 14. [LEMME DES NOYAUX]
Soit $(P_i)_{1 \le i \le r}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors en posant $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$, on a $\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(f))$. De plus, le projecteur de $\ker(P(f))$ sur l'un de ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres est un polynôme en f.

APPLICATION 15. Soit P annulateur de f. Si $P = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$ où les $(P_i)_{1 \le i \le r}$ sont deux à deux premiers, alors on a la décomposition en sous-espaces f-stables $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i^{\alpha_i}(f))$.

Exemple d'un projecteur, d'une symétrie

I. D. Liens entre polynômes et valeurs propres [MM16, ChV/VII]

PROPOSITION 16. *Soit F un sous-espace f-stable de E. On pose f_F l'endomorphisme induit sur F par f. Alors :*

$$\pi_{f_F} \mid \pi_f \qquad \text{et} \qquad \chi_{f_F} \mid \chi_f$$

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ est une décomposition en sous-espaces stables de E, alors $\chi_f = \prod_{i=1}^{r} \chi_{f_{E_i}}$.

EXEMPLE 17. Ce dernier résultat n'est pas vrai pour le polynôme minimal ! Si $f = \operatorname{Id}_E$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Vect}(e_i)$, $\pi_{f_{\operatorname{Vect}(e_i)}} = X - 1$ mais $\pi_f = X - 1$.

PROPOSITION 18. [LIENS ENTRE VALEURS PROPRES]
$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si $\chi_f(\lambda) = 0$ si et seulement si $\pi_f(\lambda) = 0$.

EXEMPLE 19. Pour $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on définit $\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice compagnon de P. On a alors $\chi_{\mathcal{C}(p)} = \pi_{\mathcal{C}(p)} = P$.

Théorème 20. [Théorème de Cayley-Hamilton]
χ_f est un polynôme annulateur de f. Autrement dit, $\pi_f \mid \chi_f$.

II. Application à la réduction d'endomorphismes

II. A. Trigonalisation et diagonalisation [MM16, ChVIII/IX/X] [Gou09, §4.4, p193]

Définition 21. [multiplicités]
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. On appelle :
- multiplicité géométrique de λ la dimension de $E_\lambda = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})$, notée $m_g(\lambda)$,
- multiplicité algébrique de λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f, notée $m_a(\lambda)$,
- multiplicité minimale de λ la multiplicité de λ en tant que racine de π_f, notée $m_m(\lambda)$.

Proposition 22. *On a $m_m(\lambda) \leq m_g(\lambda)$ et $m_a(\lambda) \leq m_g(\lambda)$.*

Définition 23. On dit que f est trigonalisable (resp. diagonalisable) s'l existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire (resp. diagonale).

Théorème 24. *f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé si et seulement si π_f est scindé si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé.*

Exemple 25. Un endomorphisme nilpotent est trigonalisable. Dans une base adéquate, la matrice est même triangulaire supérieure puisque les valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable sont les coefficients diagonaux de sa matrice dans une base de trigonalisation.

Théorème 26. *f est diagonalisable si et seulement si π_f est scindé à racines simples ($m_m(\lambda) = 1$ pour λ valeur propre de f) si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples si et seulement si $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ pour toute valeur propre λ.*

Exemple 27. Un endomorphisme trigonalisable ayant des valeurs propres deux à deux distinctes ($m_g(\lambda) = 1$) est diagonalisable.

Exemple 28. Si A est diagonalisable, la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ l'est aussi, mais la matrice $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ne l'est que si de plus A est nulle.

Théorème 29. [décomposition de Dunford]
Supposons f de polynôme caractéristique scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, $f = d + n$ et d commute avec n.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

Application 30. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. On note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les n racines de χ_M (par nécessairement distinctes). Soit (D, N) la décomposition de Dunford de M. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}DP = \Delta = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ soit diagonale. Alors on a :

$$\exp(A) = P \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, \ldots, e^{\mu_n}) P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

Exemple 31.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Application 32. Résolution de l'équation différentielle $Y' = AY$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II. B. Décompositions en sous-espaces stables [MM16, ChX/XI]

Théorème 33. [décomposition de Jordan]
Supposons f de polynôme caractéristique scindé. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres. Il existe des entiers $d_{j,1} \geq \cdots \geq d_{j,\ell_j}$ pour $j \in [\![1, r]\!]$ tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E, $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(B_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq k \leq \ell_j}}$, où $B_{j,k} = \lambda_j I_{d_{j,k}} + J_{d_{j,k}}$ avec $J_d = \mathcal{C}(X^d) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

Exemple 34. Dans le cas d'un endomorphisme nilpotent, la donnée de la décomposition de Jordan (c'est-à-dire $d_1 \geq \cdots \geq d_\ell$) équivaut à la donnée du tableau de Young de l'endomorphisme. Voir des exemples en annexe. Lecture de l'image, du noyau de l'endomorphisme, etc.

Application 35. Deux endomorphismes scindés sont semblables si et seulement si ils ont même décomposition de Jordan.

Définition 36. [Polynôme minimal local, endomorphisme cyclique]
Soit $x \in E$. $\varphi_{f,\,x} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow E, P \longmapsto P(f)(x)$ est un morphisme d'espaces vectoriels. Son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[f]$ engendré par un unique polynôme unitaire $\pi_{f,\,x}$ appelé polynôme minimal local de f en x. On note $E_{f,\,x}$ son image.
Lorsque $E = E_{f,\,x}$ pour au moins un $x \in E$, on dit que f est cyclique.

Proposition 37. *Pour tout $x \in E$, $E_{f,\,x}$ est un sous-espace f-stable et $\mathcal{B}_x = (x, f(x), \dots, f^p(x))$ où $p = \dim(E_{f,\,x})$ en est une base.*

Exemple 38. En dimension 2, un endomorphisme est soit cyclique soit une homothétie.

Proposition 39. *Il existe $x \in E$ tel que $\mu_{f,\,x} = \mu_f$. Pour un tel x, $E_{f,\,x}$ admet alors un supplémentaire f-stable.*

Théorème 40. [Décomposition de Frobenius]
Il existe une unique suite finie de polynômes unitaires $P_1, \dots, P_r$, appelés invariants de similitude et une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ en sous-espaces stables de E telles que :
- *$P_{i+1} \mid P_i$ pour tout $1 \leq i \leq r-1$,*
- *f_{E_i} est cyclique de polynôme minimal P_i pour tout $1 \leq i \leq r$.*

Remarque 41. f est quelconque ici (contrairement à la décomposition de Jordan). On a $P_1 = \pi_f$ et $\prod_{i=1}^r P_i = \chi_f$.

Application 42. Deux endomorphismes sont semblables si et seulement si ils ont les mêmes invariants de similitudes.

Exemple 43. La réduite de $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

III. Calculs pratiques avec des polynômes d'endomorphismes

III. A. Calculs d'inverses, de puissances [MM16, §I.4, p5]

Proposition 44. *Si f admet un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ tel que $a_0 = P(0) \neq 0$, alors f est inversible et $f^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^p a_k f^{k-1} \in \mathbb{K}[f]$.*

Corollaire 45. *f est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de π_f.*

Proposition 46. *Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(f) = R(f)$ si R est le reste dans la division euclidienne de P par n'importe quel polynôme annulateur de f.*

Application 47. Si $p = \deg(\pi_f)$, on a $f^m \in \mathrm{Vect}((f^k)_{0 \leq k < p})$.

Exemple 48. Si $P = (X-a)(X-b)$ annule f (avec $a, b \in \mathbb{C}$ distincts), alors :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ f^m = \frac{a^m - b^m}{a-b} f + \frac{ba^m - ab^m}{b-a} \mathrm{Id}_E$$

III. B. Application aux matrices stochatisques [MM16, ChXIV]

Définition 49. On dit que $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est stochastique si ses coefficients sont à valeurs dans $[0,1]$ et si pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a $\sum_{j=1}^m q_{i,\,j} = 1$.

Application 50. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $E = [\![1, m]\!]$ de mesure initiale ν_0 et de noyau de transition la matrice stochatisque Q. Si ν_n est la loi de X_n, alors $\nu_n = \nu_0 Q^n$ et donc si l'on a un polynôme annulateur de Q, on peut simplifier le calcul de ν_n.

Définition 51. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou Q) est irréductible si $\forall i, j \in E, \exists n \in \mathbb{N} \,|\, q_{i,\,j}^n > 0$.

Rajouter quelques lemmes …

Théorème 52. [Théorème de Perron-Frobenius]
Soit A une matrice positive irréductible, alors $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ est une valeur propre de A, de sous-espace propre de dimension 1 admettant un vecteur propre positif.

Application 53. On a $\rho(Q) = 1$ donc si Q est irréductible, $Q^\top$ admet un unique vecteur propre ν associé à 1 qui est l'unique mesure invariante par Q, c'est-à-dire telle que $\nu Q = \nu$.

Application 54. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $E = [\![1, m]\!]$ de mesure initiale ν_0 et de noyau de transition la matrice stochatisque Q irréductible, alors elle admet une unique mesure invariante, c'est-à-dire une mesure ν telle que $\nu^n = \nu$ si $\nu_0 = \nu$.

ANNEXE

Polynômes minimaux et caractéristiques usuels

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $1 \leq p \leq n-1$.

f	π_f	χ_f
nilpotent d'indice k	X^k	X^n
homothétie de rapport λ	$X-\lambda$	$(X-\lambda)^n$
projecteur sur F	X^2-X	$(X-1)^p X^{n-p}$
symétrie par rapport à F	X^2-1	$(X-1)^p(X+1)^{n-p}$

Tableaux de Young

Chaîne réductible/irréductible, périodique/apériodique

QUESTIONS

Q Que nous dit la décomposition de Dunford ?

R À un nilpotent près, un endomorphisme trigonalisable est diagonalisable.

Q A-t-on existence et/ou unicité de la décomposition de Dunford pour un endomorphisme non trigonalisable ?

Q Montrer que $\deg(\mu_A) \leq 1 + \mathrm{rg}(A)$.

Q Si $AB - BA = B$, que peut-on dire de B ?

R On montre que $AB^k - B^k A = kB^k$ pour tout k. On en déduit que $\mathrm{Tr}(B^k) = 0$ pour tout k, et donc que B est nilpotent.

Q Trouver A telle que la matrice $D = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

R S'il existe un polynôme scindé à racines simples annulateur de D, alors il annule A et donc A est diagonalisable. On vérifie qu'alors seule la matrice nulle convient …

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. Beck, J. Malick et G. Peyré : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Gou09] X. Gourdon : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[MM16] R. Mansuy et R. Mneimné : *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes*. De Boeck, 2 ème édition, 2016.