155 ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES EN DIMENSION FINIE.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

I. Généralités

I. A. Eléments propres [MM16, ChI/IV]

Définition 1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si $E_\lambda = \ker f - \lambda \operatorname{id}_E$ est non réduit à $\{0\}$. E_λ est appelé sous-espace propre de f associé à λ et ses éléments non nuls sont les vecteurs propres associés à λ. On note $\operatorname{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

Proposition 2. *Les sous-espaces propres de f sont f-stables et en somme directe.*

Exemple 3. Supposons que $n = 3$ et qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad \text{où } \alpha \neq \beta \in \mathbb{K}^2$$

Alors $\operatorname{Sp}(f) = \{\alpha, \beta\}$, $E_\alpha = \operatorname{Vect}(e_1)$, $E_\beta = \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ et $E = E_\alpha \oplus E_\beta$.

I. B. Polynômes d'endomorphismes [MM16, ChI/IV]

Pour $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 4. [Polynôme minimal] L'application $\varphi_f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E), P \longmapsto P(f)$ est un morphisme d'algèbres. Son noyau, l'ensemble des polynômes annulateurs de f, est un idéal de $\mathbb{K}[f]$ donc est engendré par un unique polynôme unitaire π_f appelé polynôme minimal de f.

Proposition 5. *On a $\dim(\mathbb{K}[f]) = \deg(\pi_f)$.*

Exemple 6. Polynômes minimaux usuels **[voir annexe]**

Remarque 7. Se donner un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ revient à se donner sa matrice M dans une base de E. On a donc les mêmes résultats pour les matrices.

Proposition 8. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que f et g commutent. Alors $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g. En particulier $\ker(P(f))$ et $\operatorname{Im}(P(f))$ sont stables par f pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.*

Lemme 9. [Lemme des noyaux] *Soit $(P_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors en posant $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$, on a $\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(f))$. De plus, le projecteur de $\ker(P(f))$ sur l'un de ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres est un polynôme en f.*

Application 10. Soit P annulateur de f. Si $P = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$ où les $(P_i)_{1\leq i\leq r}$ sont deux à deux premiers, alors on a la décomposition en sous-espaces f-stables $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i^{\alpha_i}(f))$.

I. C. Polynôme caractéristique [MM16, ChV/VII] [Gou09, Ch4]

Définition 11. [Polynôme caractéristique] On définit le polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

Proposition 12. *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. On peut donc définir le polynôme caractéristique de f.*

Exemple 13. En dimension 2, on a $\chi_M = X^2 - \operatorname{Tr}(M)X + \det(M)$ et $\chi_M(M) = 0$.
En dimension quelconque, si $\chi_M = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $a_n = 1$, $a_{n-1} = -\operatorname{Tr}(M)$ et $a_0 = (-1)^n \det(M)$.
Polynômes caractéristiques usuels **[voir annexe]**

I. D. Liens entre polynômes et valeurs propres [MM16, ChV/VII]

Proposition 14. *Soit F un sous-espace f-stable de E. On pose f_F l'endomorphisme induit sur F par f. Alors $\pi_{f_F} \mid \pi_f$ et $\chi_{f_F} \mid \chi_f$.*
Si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ est une décomposition en sous-espaces stables de E, alors $\chi_f = \prod_{i=1}^{r} \chi_{f_{E_i}}$.

Proposition 15. [Liens entre valeurs propres] *$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si $\chi_f(\lambda) = 0$ si et seulement si $\pi_f(\lambda) = 0$.*

Théorème 16. [Théorème de Cayley-Hamilton] *χ_f est un polynôme annulateur de f. Autrement dit, $\pi_f \mid \chi_f$.*

Définition 17. [Multiplicités] Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$ une valeur propre de f. On appelle :
- multiplicité géométrique de λ la dimension de E_λ, notée $m_g(\lambda)$,
- multiplicité algébrique de λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f, notée $m_a(\lambda)$,
- multiplicité minimale de λ la multiplicité de λ en tant que racine de π_f, notée $m_m(\lambda)$.

On a $m_m(\lambda) \leq m_g(\lambda)$ et $m_a(\lambda) \leq m_g(\lambda)$.

II. Diagonalisabilité [MM16, ChVIII]

II. A. Critères de diagonalisabilité

Définition 18. f est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f (c'est-à-dire si la matrice dans une certaine base de E est diagonale).

Application 19. Les valeurs propres de f sont alors les coefficients diagonaux d'une matrice diagonale associée à f (voir Exemple 3).

Théorème 20. *On a équivalence :*
- *f est diagonalisable,*
- $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda$,
- *π_f est scindé à racines simples,*
- *il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples,*
- *χ_f est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.*

Application 21.
- Si f admet n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable.
- Si f n'a qu'une valeur propre, f est diagonalisable si et seulement si f est une homothétie.
- Un projecteur et une symétrie sont diagonalisables.
- Un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
- Si $\mathrm{rg}(f) = 1$, alors f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(f) \neq 0$.

Corollaire 22. *Si F est f-stable et f est diagonalisable, alors $f_{|F}$ est diagonalisable.*

Application 23. [Cardinal de $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$] [Rom17, p148–151]
Soit $n \in \mathbb{N}$, $q = p^r$ où p est premier et $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbb{F}_q$. Alors en posant $|\mathcal{GL}_0(\mathbb{F}_q)| = 1$, on a :

$$|\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{n_1+\cdots+n_q=n} \frac{|\mathcal{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^q |\mathcal{GL}_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

II. B. Co-diagonalisabilité

Proposition 24. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que f et g commutent. Alors $\mathrm{Im}(f)$ et les sous-espaces propres de f sont stables par g.*

Proposition 25. *Soit $(f_k)_{1 \le k \le N}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de diagonalisation (on dit que les $(f_k)_{1 \le k \le N}$ sont co-diagonalisables).*

Application 26. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Alors $\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définit par $\Theta(M) = AMB$ est diagonalisable.

Exemple 27. Soit G un sous-groupe fini abélien de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors les éléments de G sont co-diagonalisables. Donc G est conjugué à un sous-groupe de matrices diagonales.

II. C. Topologie pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ [BMP05, §4.3.3/4.6, p179/217]

Proposition 28. *Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $|\lambda| \le \|\|f\|\|$ où $\|\|.\|\|$ est la norme subordonnée à n'importe quelle norme sur E.*

Proposition 29. *Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.*

Proposition 30. *$M \longmapsto \chi_M$ est continue.*

Application 31. L'ensemble des matrices nilpotentes est fermé.

Proposition 32. *$\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$. En particulier $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

II. D. Liens avec les endomorphismes semi-simples [BMP05, §4.2.1, p158–161]

Définition 33. [Endomorphisme semi-simple]
f est dit semi-simple si tout sous-espace f-stable admet un supplémentaire f-stable.

Théorème 34. *f est semi-simple si et seulement si π_f est sans facteur carré.*

Application 35. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f est semi-simple si et seulement si f est diagonalisable. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, f est semi-simple si et seulement si f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exemple 36. Si f est nilpotente, alors f est semi-simple si et seulement si $f = 0$.

Exemple 37. Les rotations de $\mathbb{R}^2$ sont semi-simples.

Application 38. Supposons f semi-simple et soit F un sous-espace f-stable. Alors u_F et $\overline{u} : E/F \longrightarrow E/F$ sont aussi semi-simples.

III. Décomposition de DUNFORD

[MM16, Ch10] [Gou09, §4.4, p193]

THÉORÈME 39. [DÉCOMPOSITION DE DUNFORD]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé. Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, $f = d + n$ et d commute avec n.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

APPLICATION 40. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. On note $\mu_1, \dots, \mu_n$ les n racines de χ_M (comptées sans leur multiplicité). Soit (D, N) la décomposition de DUNFORD de M. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}DP = \Delta = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ soit diagonale. Alors on a :

$$\exp(A) = P \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\mu_1}, \dots, \mathrm{e}^{\mu_n}) P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

EXEMPLE 41.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} & \mathrm{e}/2 \\ 0 & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 42. Un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

APPLICATION 43. Résolution de l'équation différentielle $Y' = AY$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

REMARQUE 44. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on n'a pas continuité de $f \longmapsto (d,n)$: considérer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

IV. Théorèmes spectraux

[Rom17, Ch22, p697]

On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et on considère E euclidien (resp. hermitien) de dimension finie. On note $M^* = \overline{M}^\top$ la transconjuguée de M. On note f^* l'adjoint de $f \in \mathcal{L}(E)$.

DÉFINITION 45. On dit que f est une isométrie (resp. un endomorphisme unitaire) si f préserve la norme ($\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$).

DÉFINITION 46. On dit que f est auto-adjoint si $f^* = f$. On dit que f est normal si $f^*f = ff^*$.

EXEMPLE 47. On a les mêmes définitions pour les matrices. Une matrice symétrique ou orthogonale (resp. hermitienne ou unitaire) est normale.

LEMME 48. *Si F est f-stable et f est normal alors $f^\perp$ est f-stable et f^*-stable.*

APPLICATION 49. Les sous-espaces propres de f normal ont un orthogonal f-stable.

THÉORÈME 50. [RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX, CAS COMPLEXE]
Si E est hermitien, tout endomorphisme normal est diagonalisable dans une base orthonormée.

LEMME 51. *Toute matrice symétrique réelle admet une valeur propre réelle. De plus les sous-espaces propres associés sont deux à deux orthogonaux.*

THÉORÈME 52. [RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES AUTO-ADJOINTS]
Tout endomorphisme auto-adjoint admet une base orthonormale de diagonalisation.

APPLICATION 53. Pour déterminer les valeurs propres $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_r$ de f auto-adjoint, on procède par récurrence en posant :

$$\mu_i = \min(\{\langle f(x) \mid x\rangle \mid \|x\| = 1 \text{ et } x \in (E_{\mu_0} \oplus \dots \oplus E_{\mu_{i-1}})^\perp\})$$

ANNEXE

Polynômes minimaux et caractéristiques usuels
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $1 \leq p \leq n-1$.

f	π_f	χ_f
nilpotent d'indice k	X^k	X^n
homothétie de rapport λ	$X-\lambda$	$(X-\lambda)^n$
projecteur sur F	X^2-X	$(X-1)^p X^{n-p}$
symétrie par rapport à F	X^2-1	$(X-1)^p(X+1)^{n-p}$

SPEECH

La diagonalisation permet de trouver une base de vecteurs propres, dans laquelle il est souvent beaucoup plus aisé de faire des manipulations !

QUESTIONS

Q Que peut-on dire des sous-espaces stables de f diagonalisable ?

R Ils admettent un supplémentaire stable, par le théorème de la base incomplète.

Q Comment montrer le Corollaire 22 ?

Q Le Théorème 52 est-il le même résultat que la propriété de réduction des formes quadratiques ? (l'un découle-t-il de l'autre ?)

R Ils n'ont rien à voir, en revanche il y a un résultat sur les formes quadratiques équivalent à ce résultat.

Q Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Que dire de $\mathcal{D}$?

R C'est un groupe abélien. Il n'est pas distingué car il existe des matrices diagonalisables non diagonales. Son commutateur est lui-même. Son normalisateur N vérifie $N/\mathcal{D} \simeq \mathfrak{S}_n$. En effet, soit $P \in N$. Pour $M = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{D}$ avec tous les coefficients distincts, on a que $M' = PMP^{-1}$ est diagonale. Notant $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses coefficients diagonaux, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\lambda_i = \mu_{\sigma(i)}$ pour $1 \leq i \leq n$, ou encore $M' = P_\sigma M$. On en déduit que $P \in P_\sigma E$.

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. Beck, J. Malick et G. Peyré : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Gou09] X. Gourdon : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[MM16] R. Mansuy et R. Mneimné : *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes*. De Boeck, 2 ème édition, 2016.

[Rom17] J.-E. Rombaldi : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.