

I. Définitions et propriétés générales

[Gou09, §3.5, p134–137]

I. A. Formes n -linéaires alternées, déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

DÉFINITION 1. [APPLICATION n -LINÉAIRE, ALTERNÉE]

Soit $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

- On dit que f est n -linéaire si en tout point les n applications partielles sont linéaires. L'ensemble des applications n -linéaires est noté $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.
- Si $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$, on dit que f est alternée si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux des $\{x_i\}_{1 \leq i \leq p}$ sont égaux.

THÉORÈME 2. [PROPRIÉTÉS DE $\Lambda_n(E)$]

L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n -linéaires alternées de E est un espace vectoriel de dimension 1. Il existe une unique forme n -linéaire alternée égale à 1 sur une base donnée de B .

DÉFINITION 3. [DÉTERMINANT DANS UNE BASE]

Soit B une base de E . On appelle déterminant dans la base B , et on note $\det_B$, l'unique forme n -linéaire alternée égale à 1 sur B .

COROLLAIRE 4. [EXPRESSION DE $\det_B$]

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E . En notant $(x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$ les coordonnées de x_i dans une base B de E , on a :

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \times \dots \times x_{n,\sigma(n)}$$

COROLLAIRE 5. [CHANGEMENT DE BASE]

Soit B une base de E . Pour $f \in \Lambda_n(E)$, on a $f = f(B) \det_B$.

En particulier, si B' est une autre base de E , on a $\det_{B'} = \det_{B'}(B) \det_B$.

PROPOSITION 6. [CARACTÉRISATION D'UNE FAMILLE LIÉE, LIBRE]

Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On a équivalence entre :

- la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ est liée,
- pour toute base B de E , on a $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$,
- il existe une base B de E telle que $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$.

I. B. Déterminant d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

DÉFINITION 7. [DÉTERMINANT D'UNE MATRICE]

On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note $\det(A)$.

PROPOSITION 8. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les propriétés suivantes :

- on ne change pas la valeur du déterminant lorsque l'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes,
- $\det(A^\top) = \det(A)$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- Si A et B sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$.
- $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

DÉFINITION 9. [DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME]

On note $\det(f)$ le déterminant de la matrice de f dans une base de E .

REMARQUE 10. On transpose les propriétés de la Proposition 8 aux endomorphismes.

II. Méthodes de calcul de déterminants

EXEMPLE 11. Déterminant en dimensions 2 et 3 (règle de SARRUS).

II. A. Mineurs et cofacteurs

[Gou09, §3.5, p136–137]

DÉFINITION 12. [MINEUR, COFACTEUR, COMATRICE]

Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On appelle mineur d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice d'ordre $n-1$ déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j . On appelle cofacteur d'indice (i, j) le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

On définit la comatrice de A par $\text{Com}(A) = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

THÉORÈME 13. [DÉVELOPPEMENT PAR RAPPORT ...]

- [À UNE COLONNE] Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$.
- [À UNE LIGNE] Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$.

THÉORÈME 14. [FORMULE DE LA COMATRICE]

On a $A \operatorname{Com}(A)^\top = \operatorname{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$.

En particulier, si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Com}(A)^\top$.

II. B. Matrices triangulaires par blocs

[Rom17, §17.2, p542–543]

LEMME 15. Si A est une matrice triangulaire, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

APPLICATION 16. [PIVOT DE GAUSS]

La formule du Théorème 13 est impraticable en réalité (trop d'opérations). Via des opérations sur les lignes et les colonnes, on transforme toute matrice en une matrice triangulaire supérieure dont on peut facilement calculer le déterminant.

THÉORÈME 17. [DÉTERMINANT PAR BLOCS]

Supposons A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & A_2 & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix}$$

où les $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont des matrices carrées et $\star$ des matrices quelconques de tailles adéquates. Alors $\det(A) = \prod_{i=1}^p \det(A_i)$.

II. C. Exemples classiques

[Gou09, §3.5, p143–147]

EXEMPLE 18. [DÉTERMINANT CIRCULANT]

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq k \leq n-1} P(\omega^k) \quad \text{où} \quad \begin{cases} P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i \\ \omega = \exp(2i\pi/n) \end{cases}$$

PROPOSITION 19. [CONVERGENCE D'UNE SUITE DE POLYGONES VERS L'ISOBARYCENTRE]

On définit par récurrence une suite $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par $P^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$ et

$$P^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2} \right) \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

Alors $P^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} (g, g, \dots, g)$ où $g = \text{Isobar}(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$.

EXEMPLE 20. [DÉTERMINANT DE VANDERMONDE]

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors $\det((a_i^j)_{1 \leq i, j \leq n}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

[voir annexe]

EXEMPLE 21. [DÉTERMINANT DE CAUCHY]

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que $a_i + b_i \neq 0$. Alors :

$$\det \left(\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

III. Applications des déterminants en analyse**III. A. Propriétés du déterminant**

[Rou99, §2.3, p74–76]

PROPOSITION 22. $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et on a :

$$\forall M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d \det_M(H) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Com}(M)^\top H)$$

APPLICATION 23. [WRONSKIEN]

Soient $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$ des solutions de l'équation différentielle linéaire $y' = A(t)y$. On définit leur déterminant wronskien $w(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$. Alors $w'(t) = \operatorname{Tr}(A(t))w(t)$. De plus si A est constante alors on a $\det(\exp(tA)) = \exp(t \operatorname{Tr}(A))$.

APPLICATION 24. On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- i) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes,
- ii) Deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

III. B. Changement de variables

[Gou08, §5.4, p334–335]

THÉORÈME 25. [CHANGEMENT DE VARIABLES]

Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et ϕ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur V . Alors pour toute fonction borélienne $f : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_V f(v) dv = \int_U f(\phi(u)) |J_\phi(u)| du \quad \text{où} \quad J_\phi(u) = \det(d\phi_u)$$

APPLICATION 26. [PASSAGE EN COORDONNÉES POLAIRES]

Pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne, on a $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$.

IV. Applications des déterminants en algèbre

IV. A. Polynôme caractéristique

[Gou09, §4.1/4.2, p162/176] [BMP05, §4.3.3/4.6, p179/217]

REMARQUE 27. On étend la formule explicite du Corollaire 4 à une matrice à coefficients dans un anneau A quelconque (le déterminant est un polynôme). Si A est intègre, les propriétés du déterminant restent vraies car A se plonge dans $\text{Frac}(A)$.

DÉFINITION 28. [POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE]

On définit le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

On définit le polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{L}(E)$ comme le polynôme caractéristique d'une matrice de f dans n'importe quelle base de E .

APPLICATION 29.

- Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A ,
- L'ensemble des matrices nilpotentes est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

IV. B. Systèmes linéaires

[Gou09, §3.5, p137–138] [Rom17, p547–548]

Soient p et q deux entiers et $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On s'intéresse à la résolution du système $(\mathcal{S}_B) \quad AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et de paramètre $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

THÉORÈME 30. $\text{rg}(A)$ est l'ordre du plus grand mineur extrait de A qui est non nul.

EXEMPLE 31. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ où a et b sont des paramètres réels.

Alors $\text{rg}(M) \geq 2$ et on a $\text{rg}(M) = 2 \iff (a, b) = (1, 3)$. [Gri15, §4, p136]

THÉORÈME 32. [SYSTÈME DE CRAMER]

Lorsque $p = q$, alors $(\mathcal{S}_B)$ admet une unique solution pour tout paramètre B si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, la solution X_B de $(\mathcal{S}_B)$ est le vecteur de coordonnées :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

V. Applications des déterminants en géométrie

V. A. Volume d'un parallélépipède

[BMP05, §4.4.1, p184] [Gri15, p127]

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique. Pour $n = 2$, on a :

THÉORÈME 33. [AIRE D'UN PARALLÉLOGRAMME]

[voir annexe]

Soit $\mathcal{A}(v, w)$ l'aire du parallélogramme engendré par v et w . Alors $\mathcal{A}(v, w) = |\det(v, w)|$.

On peut généraliser en dimension quelconque :

THÉORÈME 34. [VOLUME D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE]

Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. En notant $\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_n$, alors $\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$.

V. B. Déterminant de GRAM et inégalité de HADAMARD

[Gou09, §5.4, p262–263] [Rom17, §17.4.7, p560]

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien (réel ou complexe).

DÉFINITION 35. [MATRICE ET DÉTERMINANT DE GRAM]

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E . On appelle matrice de GRAM de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $M_G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ et déterminant de GRAM de $x_1, \dots, x_n$ le déterminant de la matrice de GRAM, noté $G(x_1, \dots, x_n)$.

THÉORÈME 36. [DISTANCE À UN SOUS-ESPACE VECTORIEL]

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie n de E , muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors pour tout $x \in E$, on a $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$.

THÉORÈME 37. [INÉGALITÉS DE HADAMARD]

[voir annexe]

- Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E . Alors $G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.
- Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Alors $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$.

Dans les deux points, on a égalité si et seulement si la famille $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.

APPLICATION 38. Interprétation géométrique de l'inégalité de HADAMARD dans $\mathbb{R}^n$.

ANNEXE

ANNEXE

* Exemple 17 : Illustration des opérations élémentaires sur le déterminant de VANDERMONDE

$$V_{1,n} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad V_{2,n} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

On fait $C_n \leftarrow C_n - a_1 C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - a_1 C_{n-2}$, etc. ...

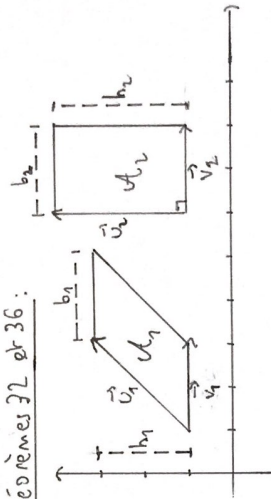
$$V_{1,n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{prop 8.iii)}$$

développement
selon ligne 1
(thm 12)

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) V_{2,n}$$

linéarité selon les
lignes (det 3 et
prop 8.ii)

* Théorèmes 32 et 36 :



$$b_i x_i = A_i = |\det(\vec{u}_i, \vec{v}_i)|$$

+ interprétation de l'inégalité de HADAMARD.

SPEECH

Je vais vous présenter la leçon intitulée « Déterminant. Exemples et applications. ». Pourquoi étudie-t-on les déterminants ? Il y a deux motivations principales : d'un côté l'aspect pratique du déterminant (caractérisations simples de la liberté, méthodes de calculs nombreuses) et de l'autre le fait qu'il possède de nombreuses applications (on pense à l'étude de systèmes linéaires, d'endomorphismes, etc). Cela rend donc cet outil puissant.

Avant de revenir à ses applications, commençons par le définir. Dans la première partie on se place sur un corps $\mathbb{K}$ et on considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n . On observe que les formes n -linéaires alternées de E forment un espace vectoriel de dimension 1, ce qui permet de définir le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ comme l'unique forme n -linéaire alternée qui vaut 1 sur cette base. On a de plus une formule explicite dépendant des coefficients. On définit également le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ et d'un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. La n -linéarité et le caractère alterné donnent alors des premiers résultats ($\det(AB) = \det(A)\det(B)$, stabilité par ajouts d'une combinaison linéaire de colonnes et surtout condition d'inversibilité d'une matrice) qui ouvrent la voie à des méthodes explicites de calculs de déterminants, comme le développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. Ce développement est en général intéressant pour des matrices plutôt creuses (ou pour obtenir des relations de récurrence), mais dans la pratique ce sont les déterminants de matrices triangulaires ou triangulaires par blocs qui sont les plus simples à calculer, c'est pour cela qu'on essaye de s'y ramener via la méthode du pivot de GAUSS qui transforme une matrice en matrice triangulaire. On peut citer des applications classiques de ces méthodes (VANDERMONDE, circulant, CAUCHY).

Donc les méthodes de calculs sont nombreuses et variées, ce qui tombe bien parce qu'il y a plein de domaines d'applications du déterminant, c'est l'objet de la suite de la leçon. Tout d'abord en analyse, on remarque que l'application $\det$ est un polynôme et est donc $\mathcal{C}^\infty$, l'expression de sa différentielle permet par exemple l'étude du wronskien d'un système de solutions d'une équation différentielle, ce qui constitue mon premier développement. En théorie de l'intégration, le déterminant joue un rôle fondamental dans la formule du changement de variables. Ensuite en algèbre, on peut étudier le polynôme caractéristique d'une matrice A défini comme $\det(XI_n - A)$. Cette définition est possible puisque le déterminant est un polynôme et ne fait pas intervenir d'inverses donc on peut le définir sur un anneau. Lorsque cet anneau est intègre, on conserve les propriétés vues précédemment. Ce polynôme caractéristique contient notamment des informations sur les valeurs propres de A . Toujours concernant l'étude d'une matrice, on peut s'intéresser à la résolution d'un système de type $AX = B$. Les formules de CRAMER donnent alors la solution explicite unique dans le cas où $\det(A) \neq 0$. Enfin, on peut aussi souligner le rôle du déterminant en géométrie. Le déterminant de n vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ s'interprète en effet comme le volume du parallélépipède engendré par ses n vecteurs. Plus généralement, dans un espace pré-hilbertien E , on peut définir le déterminant de GRAM qui va être relié à la distance d'un point à un sous-espace vectoriel de E . Ce déterminant permet de démontrer l'inégalité de HADAMARD, qui, dans le cas de $\mathbb{R}^n$, s'interprète comme le fait que le volume d'un parallélépipède de longueurs de côtés fixés est maximisé lorsqu'il est un rectangle, ou un hyperrectangle. Cela fait l'objet de mon deuxième développement.

QUESTIONS

- Q Quelle est l'application principale du procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT ?
- R L'existence d'une base orthonormée.
- Q Calculs de déterminants dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Liens entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
- Q Calculer $\det((i \wedge j)_{i,j})$.
- Q Calculer le déterminant de l'application $M \mapsto M^T$.

BIBLIOGRAPHIE

- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2^{ème} édition, 2005.
- [Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2^{ème} édition, 2008.
- [Gou09] X. GOURDON : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2^{ème} édition, 2009.
- [Gri15] J. GRIFONE : *Algèbre linéaire*. Cepaduès, 5^{ème} édition, 2015.
- [Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.
- [Rou99] F. ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.