151 DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL (ON SE LIMITERA AU CAS DE LA DIMENSION FINIE). RANG. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I. Espaces vectoriels et dimension

[Gou09, §3.1, p109–111]

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont on rappelle la définition :

DÉFINITION 1. [ESPACE VECTORIEL, SOUS-ESPACE VECTORIEL]

- $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si $(E,+)$ est un groupe commutatif et si la loi externe satisfait pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ et $x,y\in E$, $(\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$, $\lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$, $\lambda.(\mu.x)=(\lambda\mu).x$, $1_{\mathbb{K}}.x=x$,
- Un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel de E s'il est stable par les lois de E, c'est-à-dire si pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x,y\in F$, on a $\lambda.x+y\in F$.

EXEMPLE 2. Une intersection et une somme de sous-espaces vectoriels de E est un s.e.v. de E. On peut donc définir $\mathrm{Vect}(A)$.

DÉFINITION 3. [FAMILLE GÉNÉRATRICE, LIBRE, BASE, DIMENSION FINIE]
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

- $(e_i)_{i\in I}$ est dite génératrice de E lorsque $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})=E$. Lorsque E possède une famille génératrice finie, on dit que E est de dimension finie,
- $(e_i)_{i\in I}$ est dite libre lorsque $\forall(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I, \sum_{i\in I}\lambda_i e_i=0\implies\forall i\in I,\lambda_i=0$. Si ce n'est pas le cas, la famille est dite liée,
- Si $(e_i)_{i\in I}$ est libre et génératrice, on dit que c'est une base de E.
- Soient $(E_i)_{i\in I}$ des s.e.v de E. On dit que E est la somme directe des $(E_i)_{i\in I}$ si $\sum_{i\in I}E_i=E$ et que la décomposition de tout vecteur de E dans $(E_i)_{i\in I}$ est unique.

EXEMPLE 4.

- $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ est libre sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
- La base canonique de $E=\mathbb{K}^n$,
- Une sous-famille (/sur) d'une famille libre (/génératrice) de E est libre (/génératrice),
- $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie,
- Unicité de la décomposition de $x\in\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$ lorsque $(e_i)_{i\in I}$ est libre.

THÉORÈME 5. [THÉORÈME DE LA BASE INCOMPLÈTE]
Soient $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de telle que $\mathcal{L}\subset\mathcal{B}\subset\mathcal{L}\cup\mathcal{G}$.

COROLLAIRE 6. *Si E est de dimension finie, il admet une base. De plus, toute base de E a même cardinal appelé dimension de E, et noté $\dim(E)$.*
Toute famille libre (resp. génératrice) est de cardinal inférieur (resp. supérieur) ou égal à $\dim(E)$ et en cas d'égalité, c'est une base.

PROPOSITION 7. [PROPRIÉTÉS DES SOUS-ESPACES VECTORIELS DE E]
Soient E de dimension finie n, et F_1,F_2 des sous-espaces vectorielsde E.

- *F_1 est de dimension finie et $\dim(F_1)\le\dim(E)$, et $\dim(F_1)=\dim(E)\iff F_1=E$.*
- **[FORMULE DE GRASSMAN]** *On a $\dim(F_1+F_2)+\dim(F_1\cap F_2)=\dim(F_1)+\dim(F_2)$.*
- *F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E (c'est-à-dire $E=F_1\oplus F_2$) si et seulement si au moins 2 des propriétés suivantes sont vérifiées :*

$$\dim(E)=\dim(F_1)+\dim(F_2)\qquad F_1\cap F_2=\{0\}\qquad E=F_1+F_2$$

II. Rang d'une application linéaire

[Gou09, §3.2–3.3, p113–122]

Soient E,G des espaces vectoriels de dimension finie n et m.

II. A. Applications linéaires

DÉFINITION 8. [APPLICATION LINÉAIRE]
$f:E\longrightarrow G$ est linéaire si $f(\lambda.x+\mu.y)=\lambda.f(x)+\mu.f(y)$ pour $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ et $x,y\in E$.
$\mathcal{L}(E,G)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans G et $\mathcal{L}(E)=\mathcal{L}(E,E)$.

REMARQUE 9. $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont des s.e.v. et $\dim(\mathrm{Im}(f))\le\dim(E)<+\infty$.
Une application linéaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur une base de E.

DÉFINITION 10. [RANG D'UNE APPLICATION LINÉAIRE]
Pour $f\in\mathcal{L}(E,G)$, on note $\mathrm{rg}(f)$ et on appelle rang de f l'entier $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

THÉORÈME 11. [THÉORÈME DU RANG]
Soit $f\in\mathcal{L}(E,G)$. Alors $\dim(\ker(f))+\mathrm{rg}(f)=\dim(E)$.

APPLICATION 12. [MM16, §2.1, p16] Pour $f\in\mathcal{L}(E)$:

- $(\mathrm{rg}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante stationnaire et $(\mathrm{rg}(f^k)-\mathrm{rg}(f^{k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- il existe $P\in\mathbb{K}_{\dim(E)^2+1}[X]$ tel que $P(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

COROLLAIRE 13. *Lorsque $n=m$, on a f bijective $\iff f$ surjective $\iff f$ injective.*

APPLICATION 14. [BMP05, p154] Existence et unicité du polynôme interpolateur de LAGRANGE.
[Gri15, §3.3, p63] Contre-exemple en dimension infinie : $P\longmapsto P'$.

II. B. Représentations matricielles d'une application linéaire

Définition 15. [Matrice d'une application linéaire]
Soit $f \in \mathcal{L}(E,G)$. Si $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de E et G, on définit la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ comme la matrice de vecteurs colonnes les $(f(e_i))_{1\le i\le n}$ exprimés dans la base $\mathcal{C}$.

Définition 16. [Rang d'une famille de vecteurs et d'une matrice]
On définit $\mathrm{rg}(A)$ le rang de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ comme le rang de la famille de ses vecteurs colonnes $(x_1,\dots,x_n)$, c'est-à-dire l'entier $\dim(\mathrm{Vect}((x_i)_{1\le i\le n}))$.

Proposition 17. *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors A est équivalente à* $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corollaire 18. *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

Proposition 19. *Le rang d'une matrice est l'ordre du plus grand mineur non nul.*

Proposition 20. [Liens entre rangs]
- *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, il existe E, G, f et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ tels que $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.*
- *Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ représentent une même application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,G)$ dans des bases différentes si et seulement si elles sont équivalentes.*
- *$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$ lorsque A est une matrice de f.*

Application 21. [Gou09, §2/3, p37/90]
- La méthode du pivot de Gauss permet d'obtenir le rang d'une matrice,
- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(MN) = \mathrm{rg}(NM) = \mathrm{rg}(M)$.

III. Les conséquences de la dimension finie

III. A. Espaces vectoriels normés [Gou08, §1.5/1.6, p50/56]

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe de dimension quelconque (on suppose la notion de norme connue).

Théorème 22. [Théorème de Riesz]
E est de dimension finie si et seulement si $\overline{\mathbb{B}_E(0,1)}$ est compacte.

Théorème 23. *Si E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Exemple 24. Contre-exemple en dimension infinie : $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
Contre-exemple sur un corps non complet : $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $N_1(a+b\sqrt{2}) = |a|+|b|$ et $N_2 = |.|$.

Corollaire 25. *Si E est de dimension finie, les compacts de E sont les fermés bornés.*

Théorème 26. [Orthonormalisation de Gram-Schmidt] [Rom17, §22.1, p699–700]
Supposons que $\|.\|$ dérive d'un produit scalaire $\langle .\mid .\rangle$ (E est alors un espace euclidien).
Pour toute famille libre $(x_i)_{1\le i\le p}$ de E, il existe une unique famille orthonormée $(e_i)_{1\le i\le p}$ telle que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_k)$ et $\langle x_k \mid e_k\rangle > 0$.

III. B. Dualité [Rom17, Ch14, p443–456]

Définition 27. [Espace dual]
On note $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ l'espace dual de E.
A toute base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E, on associe la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*,\dots,e_n^*)$ de E^* où e_i^* est la projection sur $\mathrm{Vect}(e_i)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((e_j)_{j\ne i})$.

Proposition 28. *$\mathcal{B}^*$ est une base de E^*, appelée base duale de $\mathcal{B}$. Ainsi, E^* est de dimension finie et $\dim(E^*) = \dim(E)$.*
Par ailleurs, toute base de E^* est la base duale d'une unique base $\mathcal{B}$ de E.

Application 29. [Théorème du rang]
Si $\phi \in E^*$ est non identiquement nulle, son noyau est un hyperplan H.
Si $\phi_1,\dots,\phi_p \in E^*$, alors $\dim(\cap_{i=1}^p \ker(\phi_i)) = \dim(\cap_{i=1}^p H_i) \ge n-p$.

Définition 30. [Orthogonal]
- L'othogonal dans E^* de $\{0\} \subset X \subset E$ est $X^\perp = \{\phi \in E^* \mid \forall x \in X, \phi(x) = 0\}$,
- L'othogonal dans E de $\{0\} \subset Y \subset E^*$ est $Y^\circ = \{x \in E \mid \forall \phi \in E, \phi(x) = 0\}$.

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E^* et E respectivement.

Proposition 31. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$. De même si G est un sous-espace vectoriel de E^*, $\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$.*

Définition 32. [Transposée]
Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit l'application transposée ${}^tf : F^* \longrightarrow E^*, \phi \longmapsto \phi \circ f$.

Application 33. Si $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, alors $M_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}({}^tf) = A^\top$.
On en déduit que ${}^t(v\circ u) = {}^tu \circ {}^tv$.

IV. Applications des espaces vectoriels de dimension finie

IV. A. Réduction d'endomorphismes [MM16]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On suppose les notions de polynôme d'endomorphisme et de valeurs/vecteurs/espaces propres connues.

Lemme 34. [Lemme des noyaux]
Soit $(P_k)_{1\leq k\leq N}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors en posant $P = \prod_{k=1}^N P_k$, on a $\ker(P(f)) = \bigoplus_{k=1}^N \ker(P_k(f))$.
De plus, le projecteur de $\ker(P(f))$ sur l'un de ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres est un polynôme en f.

Exemple 35. En pratique, on utilise souvent ce lemme avec P tel que $\ker(P(f)) = E$. On obtient alors une décomposition de E en sous-espaces stables, car $\ker(Q(f))$ est stable par f pour tout polynôme Q.

Définition 36. [Polynôme caractéristique]
On définit le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
On définit le polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{L}(E)$ comme le polynôme caractéristique d'une matrice de f dans n'importe quelle base de E (en remarquant que χ_A est invariant par similitude). On le note χ_f.

Théorème 37. [Théorème de Cayley-Hamilton]
Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_f(f) = 0$.

Théorème 38. [Caractérisation d'un polynôme trigonalisable]
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé.

Théorème 39. [Décomposition de Jordan] *[Rom17, Ch21, p672–675]*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de f.
Il existe des entiers $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,r_j}$ pour $j \in [\![1, m]\!]$ tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E, $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(B_{j,k})_{\substack{1\leq j\leq m\\1\leq k\leq r_j}}$, où $B_{j,k} = \lambda_j I_{d_{j,k}} + J_{d_{j,k}}$

en notant $J_d = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

IV. B. Extensions de corps et nombres algébriques [Per96, §3.1, p65–66]

On ne considère que des corps commutatifs.

Définition 40. [Extension de corps, degré]
Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. On dit que $\mathbb{L}$ est une extension de corps de $\mathbb{K}$.
$\mathbb{L}$ est alors un $\mathbb{K}$-e.v.. Lorsque $\dim(\mathbb{L})$ est fini, on note $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = \dim(\mathbb{L})$ et on l'appelle le degré de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$. On dit alors que l'extension est finie.

Exemple 41. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$.

Théorème 42. [Théorème de la base télescopique]
Soient $\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{M}$ des corps, $(e_i)_{i\in I}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$, $(f_j)_{j\in J}$ une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$. Alors $(e_if_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{K}$.
En particulier, lorsque deux des degrés d'extensions sont finis, le troisième aussi et on a $[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}][\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

Définition 43. [Élément algébrique, transcendant]
Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$, soit $\alpha \in \mathbb{L}$. Soit $\phi : \mathbb{K}[T] \longrightarrow \mathbb{L}$ le morphisme d'anneaux tel que $\phi_{|\mathbb{K}} = \mathrm{id}$ et $\phi(T) = \alpha$.
Si ϕ est injectif, on dit que α est transcendant sur $\mathbb{K}$. Sinon, $\alpha \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $\ker(\phi) = (P)$. P est appelé polynôme minimal de α.

Exemple 44. $\sqrt{2}, i$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. e et π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$.

Théorème 45. [Caractérisation d'un algébrique]
Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$. Pour $\alpha \in \mathbb{L}$, on a :

$$\alpha \text{ est algébrique sur } \mathbb{K} \iff \mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha) \iff \dim(\mathbb{K}[\alpha]) < +\infty$$

Application 46. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute famille $p_1, \dots, p_n$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2, tous sans facteur carré, et premiers deux à deux, on a :

$$[\mathbb{Q}[\{\sqrt{p_i}\}_{1\leq i\leq n}] : \mathbb{Q}] = 2^n$$

ANNEXE

Exemple(s) du pivot de GAUSS, schémas de degrés d'extensions de corps ...

SPEECH

La théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie est fondamentale en mathématiques dans de nombreux domaines via les propriétés de réduction. Il y a deux visions possibles : d'un côté voir les applications linéaires dans des bases adaptées, en visualisant l'image de la base, et de l'autre les matrices associées qui permettent des calculs matriciels et des algorithmes. On va voir qu'il faut savoir jongler entre les deux !
Dans la première partie, on insiste sur la propriété d'existence de base en dimension finie et le théorème de la base incomplète.
Ensuite, la théorie du rang avec les deux visions et leurs liens (dernier théorème). On regardera les applications à l'étude d'endomorphismes.
Dans un troisième temps, on se demandera ce que la dimension finie apporte dans un espace vectoriel normé. Une conséquence notable est le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT. On introduira également la notion de dualité qui est très importante de par ses propriétés intéressantes que l'on va pouvoir notamment appliqué dans la partie suivante.
Enfin on regardera le cas particulier de l'étude des endomorphismes. On introduit des résultats classiques où la dimension finie joue un rôle important, notamment la décomposition de JORDAN proposée en développement où l'on va raisonner par récurrence sur la dimension (classique) et utiliser des propriétés de dualité. Notons également des résultats en théorie des corps qui utilisent des théorèmes vus dans la leçon.

COMMENTAIRES

C'est une leçon très dense, qui se complète très bien avec des morceaux d'autres leçons. Il faut faire des choix.

QUESTIONS

- Q Quelle est la première utilisation du théorème de la base incomplète ?
- R Il existe des bases en dimension finie.
- Q Calcul de rangs de matrices.
- Q Quelle est la dimension de E/F ?
- R Utiliser le théorème du rang appliqué à la projection.

BIBLIOGRAPHIE

[BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. H&K, 2ème édition, 2005.

[Gou08] X. GOURDON : *Les maths en tête - Analyse*. Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Gou09] X. GOURDON : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Gri15] J. GRIFONE : *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 5ème édition, 2015.

[MM16] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ : *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes*. De Boeck, 2 ème édition, 2016.

[Per96] D. PERRIN : *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.

[Rom17] J.-E. ROMBALDI : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.