144 RACINES D'UN POLYNÔME. FONCTIONS SYMÉTRIQUES ÉLÉMENTAIRES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. [Rom17, p365]

I. Racines d'un polynôme [Gou09, §2.2, p59] [Rom17, §12.5, p358]

Fonction polynomiale associée, racine d'un polynôme, a racine $\iff X - a \mid P$,
Exemple : un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair à une racine réelle. Polynômes cyclotomiques
Application aux polynômes d'endomorphismes : si $P(f) = 0$, $P(\mathrm{Sp}(f)) = 0$. Cas de $P = \chi_f$ et $P = \mu_f$.
Majoration du nombre de racines par le degré du polynôme s'il est non nul
Application : polynôme d'interpolation de LAGRANGE
Identification d'un polynôme et de sa fonction polynomiale sur un corps infini
Multiplicité, formule de TAYLOR
Lien entre multiplicité et zéros des polynômes dérivés
Polynôme scindé, corps algébriquement clos
Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS [Rom17, p378]
Application : toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable
Les racines (complexes) de $P \in \mathbb{Q}[X]$, ou $P \in \mathbb{R}[X]$ sont simples si P est scindé

II. Fonctions symétriques élémentaires et polynômes symétriques

II. A. Fonctions symétriques et relations coefficients/racines

[Gou09, §2.2, p59] [Rom17, §12.5, p358]

Fonctions symétriques élémentaires, exemples de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$
Toute expression symétrique en $x_1, \ldots, x_n$ est un polynôme en $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$
Relations coefficients/racines
Formules de NEWTON, application à la caractérisation des matrices nilpotentes

II. B. Structure des polynômes symétriques

[Rom17, §2.8.5, p57] [CG13, §V.D, p197] [Tau07, §XIII, p140]

Théorème de structure des polynômes symétriques
Algorithme de factorisation, exemple

PROPOSITION 1. [FORME DE HANKEL]
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et $x_1, \ldots, x_t$ ses racines distinctes, de multiplicité $m_1, \ldots, m_t$. On définit $s_k = \sum_{\ell=1}^{t} m_\ell x_\ell^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis on pose

$$\forall (X_0, \ldots, X_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \quad s(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{0 \le i,j \le n-1} s_{i+j} X_i X_j$$

Alors $s_\mathbb{R}$ (la restriction de s à $\mathbb{R}^n$) est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de signature (p, q) où $p + q = t$ et $p - q$ est le nombre de racines réelles de P.

III. Localisation des racines

III. A. Premiers résultats [FGN07a, §5.33, p213] [Gou09, §2.2/2.5, p66/83/89]

Les racines de P sont dans un disque déterminé par les coefficients de P
Théorème de GAUSS-LUCAS

THÉORÈME 2. [THÉORÈME DE KRONECKER]
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1 et $P(0) \neq 0$, alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

COROLLAIRE 3. [THÉORÈME DE KRONECKER]
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Si toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1, alors $P = X$ ou $P = \Phi_n$.

III. B. Disques de GERSHGÖRIN [FGN07b, §2.8, p80] [Ser01, §4.5, p49]

On cherche les racines de $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.
Introduction de la matrice compagnon
Matrice à diagonale dominante, disque de GERSHGÖRIN
$\mathrm{Sp}(A) \subset \cup_{i=1}^n D_i$
p racines dans une composante connexe regroupant p disques (via l'analyse complexe)

III. C. Approximation d'une racine [Rou99, Ch4, p140] [AK02, §11.1, p215]

Si P a des racines réelles $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$, la méthode de NEWTON partant de $x_0 \ge \alpha_r$ converge vers α_r. Vitesse de convergence selon la multiplicité
Méthode de la puissance

IV. Racines de polynômes et extensions de corps [Per96, §III.1.c, p70]

IV. A. Rappels sur les extensions de corps

Extension de corps, degré, théorème de la base télescopique, exemples, algébricité

IV. B. Corps de rupture et corps de décomposition

Corps de rupture d'un polynôme irréductible, existence et unicité à isomorphisme près
Exemple de $\mathbb{C}$, de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
Degré du corps de rupture
Corps de décomposition, existence et unicité à isomorphisme près
Exemple de $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$
Théorème de l'élément primitif

IV. C. Clôture algébrique

Corps algébriquement clos
Formulations équivalentes
Polynôme ne s'annulant pas sur un corps fini $\to$ tout corps fini n'est pas algébriquement clos
Clôture algébrique
Tout corps admet une clôture algébrique unique à isomorphisme près

SPEECH

Tout au long de cette leçons on s'intéresse à 3 problèmes fondamentaux liés aux racines d'un polynôme :

- l'existence de racines d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ ainsi que leur calcul exact. On peut identifier polynôme et fonction polynomiale dans le cas d'un corps infini. Trouver les racines d'un polynôme reste un problème que l'on ne peut pas résoudre en général,
- localisation approchée des racines (Gauss-Lucas, Gershgörin, autres méthodes),
- et le problème inverse du premier : soit k une extension de K et $x \in k$. Existe-t-il $P \in K[X]$ tel que $P(x) = 0$? On va ensuite regarder la structure de l'ensemble des racines de P_x le polynôme minimal de x. Théorème de l'élément primitif.
  On peut aussi présenter cette partie avec une version théorie des corps, question d'existence de racines résolue par corps de rupture/décomposition.

QUESTIONS

Q Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que P_n n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

R On vérifie que $P_n' = P_{n-1} = P_n - \frac{X^n}{n!}$. Une racine de P_n et de P_{n-1} ne peut donc être que 0, ce qui n'est pas le cas.

Q Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale satisfaisant $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. Soit $f_i : A \longmapsto \chi_A^i$ le i-ième coefficient de χ_A. Montrer que φ est un polynôme en $f_0, \dots f_{n-1}$.

R On a $\sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (-1)^n f_{n-i}(A)$.
Soit $\psi : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \varphi(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$. On a

$$\psi((\lambda_{\sigma(i)})_i) = \varphi(\operatorname{diag}((\lambda_{\sigma(i)})_i)) = P \operatorname{diag}((\lambda_i)_i) P^{-1} = \varphi(\operatorname{diag}((\lambda_i)_i))$$

ψ est symétrique, donc fonction des $(\sigma_i)_i$, donc des $(f_i)_i$ … Ainsi φ est un polynôme en les $(f_i)_i$ sur l'ensemble des matrices diagonales. Pour une matrice quelconque, on l'approche par des matrices diagonales et on conclut par continuité.

Q Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer les sous-algèbres de dimension finie de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

R Soit $\mathcal{C}$ une telle algèbre. Soit $f \in \mathcal{C}$. Pour tout i, $f^i \in \mathcal{C}$ donc $(1, f, \dots f^n)$ est liée, et il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ annulateur de f. Si f est non constante, P est nul, absurde. Donc $\mathcal{C} = \{0\}$ ou $\mathcal{C} = \{f \text{ constante}\}$.

Q Montrer que si $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$ pour tout k, alors A est nilpotente ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

R En utilisant le polynôme caractéristique de A, on a que $\operatorname{Tr}(\chi_A(A)) = 0 = na_0$ où a_0 est le coefficient constant de χ_A, donc $a_0 = 0$. Ainsi $0 \in \operatorname{Sp}(A)$ et on conclut par récurrence.
Variante : la relation donne que les sommes de Newton sont toutes nulles, donc que les fonctions symétriques sont nulles, donc que les racines sont nulles : le polynôme est nilpotent.

BIBLIOGRAPHIE

[AK02] G. Allaire et S.-M. Kaber : *Algèbre linéaire numérique*. Ellipses, 2002.

[CG13] P. Caldero et J. Germoni : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[FGN07a] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas : *Oraux X-ENS - Algèbre 1*. Cassini, 2007.

[FGN07b] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas : *Oraux X-ENS - Algèbre 2*. Cassini, 2007.

[Gou09] X. Gourdon : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses, 2ème édition, 2009.

[Per96] D. Perrin : *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.

[Rom17] J.-E. Rombaldi : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.

[Rou99] F. Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini, 1999.

[Ser01] D. Serre : *Les Matrices*. Dunod, 2001.

[Tau07] P. Tauvel : *Mathématiques générales pour l'agrégation*. Masson, 2007.