106 GROUPE LINÉAIRE D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE E, SOUS-GROUPES DE $\mathrm{GL}(E)$. APPLICATIONS.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

I. Introduction au groupe linéaire [Rom17, §5.1, p125] [Per96, ChIV, p95]

Définition du groupe linéaire, c'est bien un groupe, exemples : homothéties, rotations
On se ramène à l'étude de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ via un isomorphisme, et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$
Proposition : morphisme du déterminant
Proposition $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \ker u = \{0\} \iff \mathrm{Im}(u) = E \iff \det(u) \neq 0$
Définition de $\mathrm{SL}(E)$. Exemple
$\mathrm{SL}(E)$ distingué dans $\mathrm{GL}(E)$, le groupe quotient étant isomorphe à $\mathbb{K}^*$. $\mathrm{GL}(E)$ est alors un produit semi-direct, direct dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

II. Quelques éléments de $\mathrm{GL}(E)$ [Per96, §IV.2, p96]

II. A. Les homothéties

Homothéties, déterminant, u homothétie si et seulement si u stabilise toutes les droites $\to$ stabilisateur de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur les droites

II. B. Les dilatations

Définition, propriétés des dilatations de rapport $\notin \{0, 1\}$
Deux dilatations de même rapport sont conjuguées

II. C. Les transvections

Définition, définitions équivalentes
Les transvections sont conjuguées (dans SL_n lorsque $n \geq 3$)
Formule de conjugaison

III. Étude du groupe linéaire

III. A. Générateurs [Per96, §IV.2.d, p99]

$\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations
Approche matricielle, pivot de GAUSS
Applications : groupes dérivés, $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs

III. B. Centre et commutateurs [Per96, §IV.2/3/5, p98]

$Z(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$ est l'ensemble des homothéties, $Z(\mathcal{SL}_n(\mathbb{K}))$ est l'ensemble des homothéties de déterminant 1
Définition de $\mathcal{PSL}_n(\mathbb{K}), \mathcal{PGL}_n(\mathbb{K})$
Isomorphismes pour de petites valeurs de n avec les groupes de permutation et/ou alterné

III. C. Quelques calculs de cardinalité [Per96, §IV.5, p105] [Rom17, §5.6, p148–151]

Cardinaux de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{F}_q), \mathcal{SL}_n(\mathbb{F}_q), \mathcal{PGL}_n(\mathbb{F}_q), \mathcal{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$

APPLICATION 1. [CARDINAL DE $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$]
Soit $n \in \mathbb{N}$, $q = p^r$ où p est premier et $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de taille n de $\mathbb{F}_q$. Alors en posant $|\mathcal{GL}_0(\mathbb{F}_q)| = 1$, on a :

$$|\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{n_1+\cdots+n_q=n} \frac{|\mathcal{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |\mathcal{GL}_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

IV. Groupes orthogonal et unitaire [Per96, §V.4, p123]

On se place en caractéristique différente de 2.

IV. A. Généralités

Forme quadratique q fixé. Définition de $O(q)$, de $O^+(q)$
$u \in O(q) \iff \det u = \pm 1 \iff \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$ où φ associée à q. Équivalence matricielle.
Exemple de $q(x, y) = x^2 - y^2$
Symétrie orthogonale, $E_+ \perp E_-$, conjugaison
Si q est définie positive, définition réflexion orthogonale, les réflexions orthogonales engendrent $O(q)$. Les renversements engendrent $O^+(q)$.
Centres de $O(q), O^+(q)$
Groupe unitaire, spécial unitaire pour une forme hermitienne définie positive. Même caractérisations et diagonalisabilité en base orthonormée

IV. B. Groupe orthogonal euclidien, groupe unitaire

Définition matricielle

THÉORÈME 2. [RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX]
Sot $u \in O_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_s & & & & \\ & -I_t & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_r \end{pmatrix}$$

où $s+t+2r = n$ et pour $1 \leq k \leq r$, $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \nmid 0 \mod \pi$.

IV. C. Groupe orthogonal et géométrie de l'espace : les quaternions
[CG13, ChVII, p232]

Groupe des quaternions sous forme matricielle, conjugué, norme d'un quaternion, produit scalaire associé, base $(1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$ orthonormée, $\mathbb{H} = \mathbb{I} \oplus^{\perp} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.
On définit $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) = \{h \in \mathbb{H} \mid N(h) = 1\}$.

THÉORÈME 3. *On a $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) / \{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.*

V. Topologie
[CG13, II.4/CHVI, p37/201] [Rom17, §5.7/Ch22.3, p151/697]

On se place sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Homéomorphismes
Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
Connexités par arcs selon le corps
Décomposition polaire

ANNEXE

Tableau d'actions de groupes de matrices, stabilisateurs, orbites [CG13, §II.E, p62]
$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ sur les bases vectorielles, $\mathcal{O}_n(\mathbb{K})$ sur les bases orthonormées euclidiennes, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{K})$ sur les bases orthonormées euclidiennes directes, $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ sur les bases orthonormées hermitiennes, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$
Transvections, dilatations

SPEECH

Les espaces vectoriels ont un caractère géométrique très naturel. On s'intéresse donc à cette vision géométrique en étudiant le groupe linéaire de ces espaces.
On peut également mettre une topologie sur $\mathrm{GL}(E)$ (voir la dernière partie).

COMMENTAIRES

Les trois premières parties sont des immanquables. Pour le reste on aurait aussi pu aller du côté des représentations.

QUESTIONS

Q Déterminer les idéaux bilatères stricts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

R Soit I un tel idéal. Soit $M \in I \backslash \{0\}$. Soit r le rang de M. Alors il existe P, Q tel que $PMQ^{-1} = I_r$ donc $I_r \in I$. Par suite toutes les matrices de rang r sont dans I.
Donc I est l'ensemble des matrices de rang $r_1, \ldots r_k$ pour des entiers $r_1, \ldots, r_k$ fixés.

Q Soit $G \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ fini. Montrer que $\sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(M) \in \mathbb{Z}$.

R On a pour tout $H \in G$, $\sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(HM) = \sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(HM)$.
Soit $d = |G|$. Soit $M \in G$. $M^d = I_n$ et $X^d - 1$ est scindé à racines simples.

BIBLIOGRAPHIE

[CG13] P. Caldero et J. Germoni : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2013.

[Per96] D. Perrin : *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.

[Rom17] J.-E. Rombaldi : *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck, 2017.